حل السؤال الثاني.

$\forall\ x, y, z \in S$

1 $d(x,y) \geq 0$; $|x_i - y_i| \geq 0$; $(i = 1, \dots, n)$

عندئذٍ ينتج.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0$$

2 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} = 0$

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

من خواص القيمة المطلقة.

$$x_i = y_i \quad ; \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

3

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} = d(y,x)$$

4 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

بالاستفادة من.

$$|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i|$$

$$\leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

وبالاستفادة من الخاصية $0 < \alpha < \beta$ حيث أن

α , β أعداد موجبة:

$$\alpha + \alpha\beta < \beta + \alpha\beta$$

$$\alpha(1+\beta) < \beta(1+\alpha)$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$$

حيث أن:

$\alpha = |x_i - z_i|$; $\beta = |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$

بالتعويض عن القيم السابقة نجد

$$\frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}$$

$$= \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}$$

$$\Rightarrow \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \leq \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

لأن

$1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i| > 1 + |x_i - y_i|$ لم أضفنا العدد.

$$\frac{1}{1+|x_i - y_i| + |y_i - z_i|} \leq \frac{1}{1+|x_i - y_i|}$$

نفس الشيء بالنسبة للحد الأخير

نضرب الطرفين بـ $\frac{1}{2^i}$ ونأخذ الجمع للطرفين ف

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - z_i|}{1+|x_i - z_i|} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|y_i - z_i|}{1+|y_i - z_i|}$$

وبالتالي فإن.

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

لنبرهن أن دالة المسافة غير مولدة من نظيم.

إذاً يوجد شرطين إذا اختل أحد الشرطين يكفي لإثبات أنها غير مولدة من نظيم.

$$1)\ d(x+\cancel{z}z, y+z) = d(x,y)$$

$$2)\ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| . d(x,y)$$

لنأخذ الشرط الثاني.

$$\forall\, x,y,z \in S \ ;\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\ell_1 = d(\alpha x, \alpha y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\alpha . x_i - \alpha . y_i|}{1+|\alpha . x_i - \alpha y_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\alpha| . |x_i - y_i|}{1+|\alpha| . |x_i - y_i|}$$

$$\ell_2 = |\alpha| . d(x,y) = |\alpha| . \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$$

ونلاحظ أن الطرفين غير متساويين إذاً $\ell_1 \neq \ell_2$

إذاً الدالة غير مولدة من نظيم.

حل المثال الأول

لنحقق الشروط.

$$1)\ \bar{d}(x,y) \ge 0 \Rightarrow 1 + d(x,y) \ge 0 \Rightarrow \bar{d}(x,y) \ge 0$$

2. $\tilde{d}(x,y) = 0 \iff x = y$

3. $\tilde{d}(x,y) = 1 + d(x,y) = 1 + d(y,x) = \tilde{d}(y,x)$

حيث أن $x \neq y$

4. $\tilde{d}(x,z) = 1 + d(x,z) \quad ; \quad x \neq z$

$$\leq 1 + d(x,y) + d(y,z)$$

$$\leq 1 + d(x,y) + 1 + d(y,z)$$

$$\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)$$

ومنه نجد أن $\tilde{d}(x,y)$ فضاء متري

لنثبت أن احد الشروط غير متحقق.

$$\tilde{d}(\alpha x, \alpha y) \stackrel{?}{=} |\alpha| \cdot \tilde{d}(x,y) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\xi_1 = \tilde{d}(\alpha x, \alpha y) = 1 + d(\alpha x, \alpha y)$$
$$= 1 + |\alpha| \cdot d(x,y)$$

$$\xi_2 = |\alpha| \cdot \tilde{d}(x,y) = |\alpha| \cdot [1 + d(x,y)]$$
$$= |\alpha| + |\alpha| \cdot d(x,y)$$

ومن أجل $\alpha \neq 1$ فإن $\xi_1 \neq \xi_2$

ومنه دالة الفضاء المتري غير مشتقة من نظيم.

مثال

ليكن $X = C[a,b]$ فضاء كل الدوال الحقيقية المستمرة على المجال المغلق $[a,b]$ لنعرف الدالة عليه.

$$\forall t \in [a,b] \quad ; \quad \|x\| = \max |x(t)|$$

برهن أن $(X, \|.\|)$ فضاء منظم

وأن النظيم غير مولد من جداء داخلي.

الحل.

لنحقق الشروط.

1) $\forall x \in C[a,b]$

$$|x(t)| \geqslant 0 \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \max |x(t)| \geqslant 0 \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \|x\| \geqslant 0$$

2) $\forall x \in C[a,b] \quad ; \quad \|x\| = 0$

$$\Leftrightarrow \max |x(t)| = 0 \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\Leftrightarrow |x(t)| = 0 \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 0 \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$\Leftrightarrow x = 0_{C[a,b]}$$

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall x \in C[a,b]$

$$\|\alpha . x\| = \max |\alpha . x(t)| \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$= |\alpha| . \max |x(t)| \quad ; \quad t \in [a,b]$$

4) $\forall x, y \in C[a,b] \quad ; \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

ننطلق من القيمة المطلقة.

$$|(x+y)(t)| = |x(t) - y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)|$$

حيث أن:

$$|x(t)| \leqslant \max |x(t)| \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$|y(t)| \leqslant \max |y(t)| \quad ; \quad t \in [a,b]$$

$$|(x+y)(t)| \leqslant \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |y(t)|$$

$$|(x+y)(t)| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\forall\, t \in [a,b] \quad ; \quad \max|(x+y)(t)| \leq \|x\| + \|y\| \quad ; t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

الطلب الثاني:

يجب أن تتحقق مساواة متوازي الأضلاع.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]$$

لكن لدينا:

$$x(t) = \sin t \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$y(t) = 2$$

عندئذ نجد:

$$x(t) + y(t) = \sin t + 2$$

$$\|x+y\| = \max|\sin t + 2| = 3 \quad ; t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 = 9$$

$$\|x-y\| = \max|\sin t - 2| = 3 \quad , t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \|x-y\|^2 = 9$$

$$\|x\| = \max|\sin t| = 1 \Rightarrow \|x\|^2 = 1 \quad , t \in [0, 2\pi]$$

$$\|y\| = 2 \Rightarrow \|y\|^2 = 4$$

$$\Rightarrow \ell_1 = 18 \quad ; \quad \ell_2 = 2[1+4] = 10$$

$$\Rightarrow \ell_1 \neq \ell_2$$

وبالتالي فإن النظيم غير مولد بجداء داخلي.

بعض التعاريف في التبولوجيا.

الكرة المفتوحة.

ندعو المجموعة.

$N(x_0, \epsilon) = \{x : x \in \mathbb{R}^n ; d(x, x_0) = \|x - x_0\| < \epsilon\}$

في $\mathbb{R}$.

تمثل الكرة المفتوحة مجال $]x_0 - \epsilon , x_0 + \epsilon[$

في $\mathbb{R}^2$

تمثل الكرة المفتوحة قرص. وتمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة عدا المحيط.

في $\mathbb{R}^3$.

تمثل الكرة المفتوحة كرة ; تمثل مجموعة النقاط الواقعة في الكرة عدا المحيط.

الكرة المغلقة:

ندعو المجموعة.

$B(x_0, \epsilon) = \{x : x \in \mathbb{R}^n ; d(x, x_0) = \|x - x_0\| \leqslant \epsilon\}$

في $\mathbb{R}$.

تمثل الكرة المغلقة مجال $[x_0 - \epsilon , x_0 + \epsilon]$

في $\mathbb{R}^2$

تمثل الكرة المغلقة قرصاً مغلقاً. وتمثل مجموعة النقاط التي تقع داخل القرص مع المحيط.

في $\mathbb{R}^3$

تمثل الكرة المغلقة كرة ; وتمثل مجموعة النقاط التي تقع داخل الكرة ومع المحيط (السطح).

وإذ.

$N(x_0, \epsilon) \leq B(x_0, \epsilon)$. حيث لهما نفس نصف القطر

جوار نقطة في $\mathbb{R}^n$

لتكن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ نقول عن $U \subset \mathbb{R}^n$ أنه جوار لـ x_0
إذا وفقط إذا كان x_0 مركز لكرة مفتوحة محتواة في U
أي يوجد كرة مركزها x_0 محتواة في U.

U جوار لـ x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists N(x_0, \epsilon) \subseteq U$

المجموعة المفتوحة.

لتكن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. نقول أنها مفتوحة إذا وفقط إذا وجد
لكل عنصر $x_0 \in M$ كرة مفتوحة مركزها x_0 ومحتواة في
M وبمعنى $\forall x_0 \in M ; \exists N(x_0, \epsilon) \subseteq M$
كل مجموعة مفتوحة تحوي نقطة وهي عبارة عن جوار لهذه النقطة.

المجموعة المغلقة.

لتكن $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$. أنها مغلقة إذا كانت متممتها
مجموعة مفتوحة في X أي أن $\mathbb{R}^n \setminus M = M^c$

ملاحظة. المجموعتين المغلقتين والمفتوحتين معاً هما ϕ ، $\mathbb{R}^n$.

النقطة الداخلية.

لتكن $\phi \neq M \subset \mathbb{R}^n$. نقول عن x_0 بأنه نقطة داخلية لـ M
إذا وجد جوار للنقطة x_0 محتواة في M.
ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية لـ M بالرمز M°.

ملاحظة. إن داخل أي مجال هو مجال مفتوح دوماً.

$M = [1,2[$ فإن $M^\circ =]1,2[$

$M = [1,2]$ فإن $M^\circ =]1,2[$

تعريف ثاني للمجموعة المفتوحة. إذا كانت M مفتوحة $\Leftrightarrow M = M^\circ$

انتهت م3