النقطة الحدية (التجمع , التراكم).

نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة حدية للمجموعة $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$
إذا كانت تقاطع أي جوار محذوف لـ x_0 مع المجموعة M فإن
التقاطع غير خالي أي أن.

$$\forall N(x_0, \epsilon) \;;\; N(x_0, \epsilon) \cap (M \setminus \{x_0\}) \neq \phi$$

ويطلق على مجموعة كل النقاط الحدية لـ M باسم المجموعة المشتقة
ونرمز لها بالرمز M' أو $D(M)$.

النقطة المحيطية.

نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنه نقطة محيطية للمجموعة $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$
إذا كانت تقاطع أي جوار لـ x_0 مع M ومع متممة M
بـ غير الخالية أي:

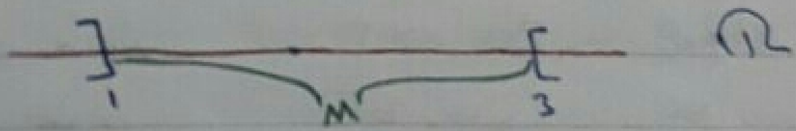
$$\forall U = U(x_0) \;;\; U \cap M \neq \phi$$

$$U \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \phi \Leftrightarrow U \cap M^c \neq \phi$$

ونرمز لمجموعة النقاط المحيطية بالرمز ∂M

نتيجة.

الفضاء المتري الحقيقي المألوف يكون طرفاه المجال من أي نوع
(مغلق , مفتوح) عبارة عن نقاط محيطية بالنسبة له.



إذا أخذنا أي جوار لـ 3 فإنه سوف يتقاطع مع M ويتقاطع مع متمم
M. والتقاطع غير خالي. أما بالنسبة لـ النقطة (2) فإن.

$$]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\;\cap\;]1, 3[\;\neq \phi$$

$$]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\;\cap\;]-\infty, 1[\;\cup\;]3, +\infty[\;= \phi$$

إذاً فإن (2) ليست نقطة محيطية.

النقطة الملاصقة.

نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة ملاصقة للمجموعة $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$

إذا كان تقاطع أي جوار للنقطة x_0 مع M لا يساوي الخالية.

$$\forall U = U(x_0) \quad ; \quad U \cap M \neq \phi$$

ونسمي مجموعة النقاط الملاصقة لـ M بلصاقة M ، ونرمز لها بالرمز $\overline{M}$.

ملاحظة.

كل نقطة تجمع هي نقطة ملاصقة.

تجمع يعني نقطة ملاصقة ، وغير ملاصقة فإنه غير تجمع.

غير تجمع فلا نعرف إذا كانت ملاصقة أو غير ملاصقة.

النقطة المنعزلة:

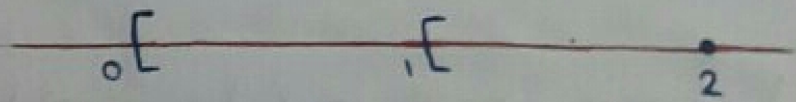
نقول عن $x_0 \in \mathbb{R}^n$ أنها نقطة منعزلة للمجموعة $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$

إذا وجد جوار للنقطة x_0 بحيث يكون.

$$\exists U = U(x_0) \quad ; \quad U \cap M = \{x_0\}$$

مثال.

لتكن لدينا المجموعة. $M = [0,1[\cup \{2\}$



$$]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\cap ([0,1[\cup \{2\})$$

$$(]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\cap [0,1[) \cup (]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\cap \{2\})$$

$$\phi \cup \{2\} = \{2\}$$

$$]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\cap (M \setminus \{2\}) = \phi$$

$$]\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}[\cap ([0,1[\cup \{2\}) \neq \phi$$

إذاً هنا سيكون أن

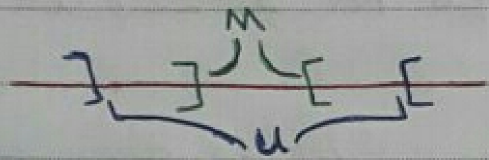
2 هي نقطة ملاصقة ومنعزلة وليست نقطة تجمع.

المجموعة المحدودة .

نقول عن مجموعة $\phi \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ إنها محدودة في $\mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

إذا وجد كرة مفتوحة تحوي M ؛ $M \subseteq N(x, r)$

مثلاً في $\mathbb{R}$ فإن:



المتتاليات في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$.

تعريف . المتتالية هي دالة منطلقها مجموعة الأعداد الطبيعية IN ومستقرها $\mathbb{R}^n$.

$$f : IN \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \longmapsto f(m) = X_m \in \mathbb{R}^n$$

$$X_m = (X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$$

$$X = (X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1})$$

نلاحظ أنه قد ولدنا من المتتالية $\{X_m\}_{m\in N}$ n متتالية حقيقية المناظرة.

تقارب المتتالية في $\mathbb{R}^n$.

نقول عن المتتالية $\{X_m\}_{m\in N}$ إنها متقاربة في $\mathbb{R}^n$ من العنصر $x \in \mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \epsilon > 0 \; ; \; \exists n_\epsilon \in IN \; ; \; m \geq n_\epsilon \Rightarrow \| X_m - X \| < \epsilon$$

أي أن .

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_{im} - X_i)^2} < \epsilon$$

مبرهنة.

الشرط اللازم والكافي كي تتقارب $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{R}^n$ من $X\in\mathbb{R}^n$

هو أن تتقارب $\{X_{im}\}_{m\in\mathbb{N}}$ من X_i.

البرهان.

$\Leftarrow$ نفرض أن $\{X_m\}$ متقاربة من X. عندئذٍ حسب التعريف.

$$\forall \epsilon>0 ;\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} ;\ m\geq n_\epsilon \Rightarrow \|X_m - X\|<\epsilon$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_{im}-X_i)^2}<\epsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(X_{im}-X_i)^2<\epsilon^2$$

$$\Rightarrow (X_{1m}-X_1)^2+(X_{2m}-X_2)^2+\dots+(X_{nm}-X_n)^2<\epsilon^2$$

أن المجموع طالما أنه منتهي فإنه أكبر من أي حد. وبشكل عام فإن.

$$(X_{im}-X_i)^2<\sum_{i=1}^{n}(X_{im}-X_i)^2<\epsilon^2 ;\ (i=1,\dots,n)$$

بجذر الطرفين.

$$\Rightarrow |X_{im}-X_i|<\|X_m-X\|<\epsilon \quad ;\ (i=1,\dots,n)$$

$$\forall \epsilon>0 ;\ \exists n_{i\epsilon}\in\mathbb{N} ;\ m\geq n_{i\epsilon} ;\ |X_{im}-X_i|<\epsilon$$

$$\Rightarrow X_{im}\xrightarrow[m\to\infty]{} X_i \quad ;\ (i=1,\dots,n)$$

$\Rightarrow$

نفرض أن $X_{im}\xrightarrow[m\to\infty]{} X_i$ حيث أن $(i=1,2,\dots,n)$

لنبرهن على.

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{im}-x_i)^2}$ لذلك لنأخذ

$$\forall \epsilon > 0 ; \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} > 0 ; \exists n_{i\epsilon} \in \mathbb{N} ; m \geq n_{i\epsilon}$$

$$\Rightarrow |x_{im} - x_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} ; \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow |x_{1m} - x_1| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} ; \quad |x_{2m} - x_2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

$$, \dots , |x_{nm} - x_n| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

بالتربيع:

$$(x_{1m} - x_1)^2 < \frac{\epsilon^2}{n} ; (x_{2m} - x_2)^2 < \frac{\epsilon^2}{n}, \dots, (x_{nm} - x_n)^2 < \frac{\epsilon^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2 < n \cdot \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^2$$

وبجذر الطرفين.

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2} < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 ; \exists n_\epsilon = \max\{n_{1\epsilon}, n_{2\epsilon}, \dots, n_{n\epsilon}\} \in \mathbb{N}$$

$$; m \geq n_\epsilon \Rightarrow \| x_m - x \| < \epsilon$$

اذاً $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ تتقارب من $x \in \mathbb{R}^n$.

نتائج بدون برهان

١- إذا وجدت نهاية لمتتالية فهي وحيدة.

٢- كل متقاربة في $\mathbb{R}^n$ تكون محدودة.

٣- لتكن $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ متقاربة من x في $\mathbb{R}^n$ ، $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ متقاربة من y في $\mathbb{R}^n$. فان

$$\{x_m \mp y_m\}_{m \in \mathbb{N}} \longrightarrow x \mp y$$

4- الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ متقاربة من X في $\mathbb{R}^1$ هو أن يحوي أي جوار لـ X جميع عناصر المتتالية باستثناء عدد منتهي منها.

5- الشرط اللازم والكافي كي تكون الجزء $M \subset \mathbb{R}^1$ مغلقة هو أن يكون لكل متتالية متقاربة في M نهاية في M.

المتتاليات الجزئية في $\mathbb{R}^1$.

لتكن $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ متتالية في $\mathbb{R}^1$ ولتكن $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الصحيحة الموجبة حيث: $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

عندئذ نسمي $\{X_{m_n}\}$ متتالية جزئية من المتتالية $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

* كيفية البناء.

كيف نبني متتالية جزئية من متتالية أصلية.

في $\mathbb{R}$ مثلاً: لنأخذ المتتالية:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{19}, \dots$$

فإن المتتالية الجزئية منها لنأخذها:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \dots, \dots$$

كل شيء قبله يتم إهماله

ونبقى الشيء في $\mathbb{R}^1$.

نقوم باختيار عنصر من المتتالية الأصلية ونضعه أول عنصر في المتتالية جديدة بحيث نهمل جميع العناصر الواقعة قبله ثم نأخذ عنصر آخر من المتتالية الأصلية ونضعه عنصر ثاني في المتتالية الجديدة وبحيث نهمل جميع العناصر الواقعة قبله وهكذا بحيث نحافظ على الترتيب.

وبالتالي نحصل على متتالية جزئية X_{m_k} من متتالية أصلية X_m.

ملاحظة دون برهان:

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية $\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ متقاربة من X هو أن تتقارب المتتالية الجزئية $\{X_{m_k}\}$ من نفس العنصر.

$$\{X_m\}_{m\in\mathbb{N}} \xrightarrow[m\to\infty]{} X \iff \{X_{m_k}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} X$$

إذا وجدت متتاليتين جزئيتين متقاربتين من نهايتين مختلفتين لمتتالية ما فإن المتتالية الأصلية تكون متباعدة حتماً.

انتهت م4