متتالية كوشي (الأساسية) في $\mathbb{R}^n$.

تعريف: نقول عن المتتالية $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ أنها متتالية كوشي في $\mathbb{R}^n$ إذا حققت الشرط التالي

$$\forall \epsilon>0 ;\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} ;\ m,n \geq N_\epsilon \Rightarrow \|X_m - X_n\| < \epsilon$$

مبرهنة

كل متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ هي متتالية كوشية.

إثبات

نفرض أن $\{X_n\}$ متتالية متقاربة من X

$$\forall \epsilon>0,\ \epsilon/2>0 ;\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} ;\ n\geq n_\epsilon \Rightarrow \|X_n - X\| < \epsilon/2$$

وإذا كان $m,n \geq n_\epsilon$

$$\|X_m - X_n\| = \|X_m - X + X - X_n\| \leq \|X_m - X\| + \|X_n - X\| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall\epsilon>0 ;\ \exists n_\epsilon\in\mathbb{N} ;\ m,n\geq n_\epsilon \Rightarrow \|X_m - X_n\|<\epsilon$$

وبالتالي فإن $\{X_n\}$ هي متتالية كوشية.

مبرهنة

كل متتالية كوشية في $\mathbb{R}^n$ هي متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$.

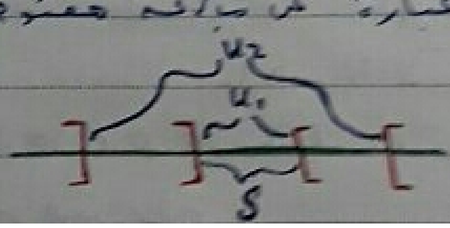
التغطية

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ولتكن $U=\{U_i ; i\in I\}$ مجموعة من المجموعات المفتوحة أو غير مفتوحة

نقول عن U أنها تشكل تغطية لـ S إذا تحقق $S\subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

وتكون هذه التغطية تغطية مفتوحة إذا كان كل عنصر من عناصر هذه المجموعة هي عبارة عن مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$.

$S \subseteq U_1 \cup U_2$



عبارة عن مجالات مفتوحة.

التراص نقول عن المجموعة $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها متراصة إذا وجدت لكل تغطية مفتوحة لـ S تغطية جزئية منتهية لـ S.

مثال.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ مجموعة منتهية في $\mathbb{R}^n$، ولتكن $\mathcal{U} = \{U_i \; ; \; i \in I\}$ تغطية مفتوحة لـ A.

لنبرهن على أن A متراصة

$\mathcal{U}$ تغطية مفتوحة لـ A $\Leftarrow$ $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

$a_i \in A \; ; \; \exists U_j \in \bigcup_{i \in I} U_i \; ; \; a_i \in U_j$

$A = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_r \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

نتيجة. كل مجموعة منتهية هي مجموعة متراصة.

مبرهنة. هاين بوريل.

$S \subset \mathbb{R}^n$ تكون متراصة $\Leftrightarrow$ S مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}^n$.

المجموعة المترابطة.

نقول عن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان U, V غير خالية بحيث.

$S \cap U \neq \phi \quad ; \quad S \cap V \neq \phi$

$(S \cap U) \cap (S \cap V) = \phi \quad ; \quad (S \cap U) \cup (S \cap V) = S$

وتسمى المجموعتان U، V بـ فصل S.

مثال.

$S =]1, 3[\cup]5, 8[$

$U =]1, 3[\quad ; \quad V =]5, 8[$

$(S \cap U) \cup (S \cap V) = S$

بالتالي فإن S غير مترابطة.

ملاحظة. المجموعة وحيدة العنصر في $\mathbb{R}^n$ تكون مترابطة.

مبرهنة دون برهان.

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة S محتواة في $\mathbb{R}$ أي $S \subseteq \mathbb{R}$ مترابطة هو أن تكون S مجال مفتوح أو مغلق.

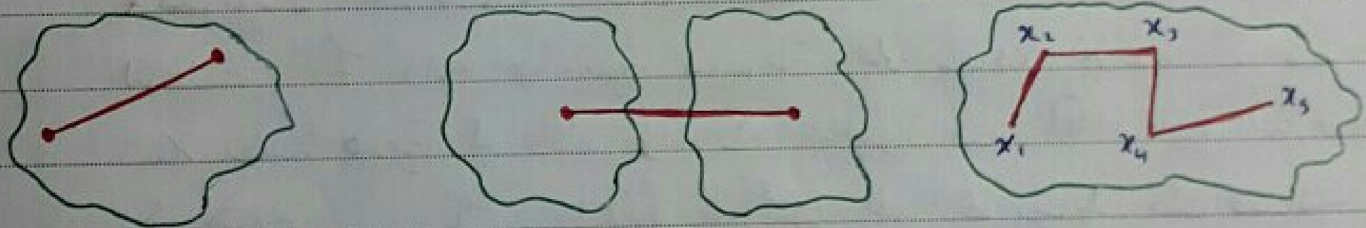
مثال.

* $[0,1] \cup [1,2]$ مترابطة لأنها تشكل مجال $[0,2]$.

* أيضا مترابطة. $[0,1] - [0,\frac{1}{2}] =]\frac{1}{2},1]$

مبرهنة. دون برهان.

لتكن $S \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعة مفتوحة، غير خالية نقول عن S أنها مترابطة إذا، وفقط إذا أمكن أن نصل بين أي نقطتين من S بخط منكسر محتواة في S.



مترابطة.   ليست مترابطة،   مترابطة.

معادلة قطعة مستقيمة في $\mathbb{R}^n$.

إن القطعة المستقيمة التي طرفاه $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$L = \{x + t(y - x) \; ; \; t \in [0,1]\}$$

هي عبارة عن مجموعة النقاط التي تحقق الشرط.

ملاحظة.

إذا كان لدينا مجموعة نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ وأن $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ قطع مستقيمة واصلة بين $x_i, x_{i+1} \; ; \; i=1,\dots,n-1$ عندئذ نقول عن الجماعة $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ بأنها تشكل خط منكسر يصل بين النقطتين x_1, x_n

نهايات الدوال الحقيقية لعدة متغيرات

تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ومستقرها إما $\mathbb{R}$ أو أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

$$f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$

حيث S هي ساحة التعريف.

لتكن x_0 نقطة حدية لـ S أي $x_0 \in S' \& D(S)$

نقول أن نهاية الدالة f.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 , \exists \delta > 0 ; 0 < \| x - x_0 \| < \delta$$
$$\Rightarrow | f(x) - A | < \epsilon$$

* تعريف آخر بدلالة المتتاليات.

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$ ولتكن x_0 نقطة حدية لـ S' و ℓ عنصراً من $\mathbb{R}$: أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ هو أن يقابل كل متتالية $\{x_m\}_{m \in N}$ في S عناصرها مختلفة جميعاً عن x_0، متقاربة من x_0 ، متتالية $\{f(x_m)\}_{m \in N}$ متقاربة من ℓ.

تعريف: جمع وضرب وقسمة دوال حقيقية.

لتكن f , g دالتين حقيقيتين ساحتاهما المجموعات الجزئيات T , S' من $\mathbb{R}^n$ على الترتيب حيث.

$$f : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

أ- أن $f \mp g$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$ حيث. أنه من أجل أي x من هذه الساحة:

$$f \mp g : S \cap T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$$

بـ- إن $f\,g$ دالة حقيقية ساحتها $S \cap T$ حيث من أجل أي x من هذه الساحة فإن.

$$f.g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

جـ- إن $\frac{f}{g}$ دالة حقيقية ساحتها $(S \cap T) - \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$.
حيث إنه لأي x من هذه الساحة فإن.

$$\frac{f}{g} : (S \cap T) - \{x : x \in \mathbb{R}^n ; g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مبرهنة.

لتكن $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، ولتكن $g : T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

ولتكن x_0 نقطة حدية لـ $S \cap T$ إذا،

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad ; \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

عندئذ،

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = A + B$$

الإثبات

حسب تعريف النهاية.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 ,\ \epsilon/2 > 0 \ ; \ \exists \delta_1 > 0$$

$$; \ 0 < \| x - x_0 \| < \delta_1 \Rightarrow | f(x) - A | < \epsilon/2$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \iff$$

$\forall \epsilon > 0 , \epsilon/2 > 0 ; \exists \delta_2 > 0 ; 0 < \|x - x_0\| < \delta_2$

$$\Rightarrow |g(x) - B| < \epsilon/2$$

$$|(f+g)(x) - (A+B)| = |f(x) - A + g(x) - B|$$

$$\leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$$

$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0 ; \exists \delta = \min(\delta_1 , \delta_2) ; 0 < \|x - x_0\| < \delta$

$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (A+B)| < \epsilon$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = A + B$$

انتهت م5