مبرهنة: لتكن الدالة. $g: T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

ولتكن x_0 نقطة حدية لـ T حيث $(x_0 \in T')$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

حيث $B \neq 0$; $g(x) \neq 0$.

الاثبات

بما أن $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$

بالتالي حسب التعريف.

$$\forall \epsilon > 0 \; ; \exists \delta > 0 \; ; \; 0 < \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow |g(x) - B| < \epsilon$$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{g(x) \cdot B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|B| \cdot |g(x)|} < \frac{\epsilon}{|B| \cdot |g(x)|} \quad \dots *$$

$$B = B - g(x) + g(x)$$

$$|B| = |B - g(x) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)|$$
$$< \epsilon + |g(x)|$$

$$\Rightarrow |B| - \epsilon < |g(x)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{|B| - \epsilon}$$

نعوض في $(*)$ ...

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\epsilon}{|B| \cdot [\,|B| - \epsilon\,]}$$

إذن ϵ منية اختيارية لنأخذها $\epsilon = \frac{|B|}{2} > 0$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\frac{|B|}{2}}{|B|\left[|B| - \frac{|B|}{2}\right]} < \frac{1}{|B|}$$

مهما تكن $\epsilon > 0$ صغيرة فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق الشرط.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x_0)} = \frac{1}{B}$$

الاستمرار للدوال الحقيقية لعدة متغيرات.

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية $\mathbb{R}^n$، مستقرها $\mathbb{R}$

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ولتكن $x_0 \in S$ نقول كن f إنها مستمرة في x_0 إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي.

$$\forall \epsilon > 0 \; ; \; \exists \delta > 0 \; ; \; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

f مستمرة على S هذا يكون إذا كان f مستمرة في كل نقطة من نقاط S.

مبرهنة دون برهان.

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$، ولتكن x_0 نقطة من S عندئذ f مستمرة في x_0 إذا وفقط إذا قابل كل جوار V للنقطة $f(x_0)$ جوارا U للنقطة x_0 في $\mathbb{R}^n$ (U تابع لـ V) بحيث أنه إذا كان x أي عنصر من $U \cap S$ فإن $f(x)$ عنصر من V. وهذا يكافئ أنه إذا كانت المتتالية $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ أي متتالية من عناصر S متقاربة من x_0 فإن المتتالية $\{f(x_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ تتقارب من $f(x_0)$.

مبرهنة.
لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$، ومستقرها $\mathbb{R}$.
حيث

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ولتكن:

$$x_0 \in S \cap S'$$

عندئذ يكون:

f مستمرة في x_0. $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

الإثبات

لنفرض أن f مستمر في x_0 عندئذ، حسب التعريف.

$$\forall \epsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

وبما أن x_0 نقطة حدية أي أن: $0 < \|x - x_0\| < \delta$

$$\forall \epsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

وحسب تعريف النهاية:

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Rightarrow$

لنفرض أن: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ لنثبت أن f مستمرة في x_0.

$$\forall \epsilon > 0 ; \exists \delta > 0 ; \|x - x_0\| < \delta \text{ و } |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

نميز حالتين.

- إذا كانت $x = x_0$ فإن $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$
إذا شرط الاستمرار محقق وبالتالي f مستمرة في x_0.
- إذا كانت $x \neq x_0$ فإن.
$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$ محقق فرضاً

فإن:

$$\forall \epsilon > 0 \; ; \; \exists \delta > 0 \; ; \; 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

أي أن f مستمرة في x_0.

ملاحظات

1- f مستمرة في x_0، و x_0 نقطة حدية في S عندئذ يمكن التبديل بين الرمزين $\lim$ و f أي أن:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} (x)\right) = f(x_0)$$

2- لا يحق لنا استخدام المبرهنة السابقة إلا إذا كانت النقطة هي نقطة حدية وتنتمي إلى مجموعة التعريف.

مبرهنة: لتكن $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، لتكن x_0 نقطة تنتمي إلى S وليست حدية أي $x_0 \in S \setminus S'$ أي هي نقطة منعزلة.

فإن f تكون مستمرة على x_0.

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن f غير مستمرة عند x_0 أي أن:

$$\exists \epsilon > 0 \; ; \; \forall \delta > 0 \; ; \; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \epsilon$$

حيث أن $x \in S$

إذا كانت $x = x_0$ فإنه سوف نحصل $|f(x) - f(x_0)| = 0 > \epsilon$

ولكن هذا يناقض كون $\epsilon > 0$.

أما إذا كانت $x \neq x_0$ فإن أي جوار لـ x_0 سوف يتقاطع مع المجموعة S بنقاط مغايرة لـ x_0.

أي أن x_0 نقطة حدية لـ S وهذا تناقض.

مبرهنة

إن مجموع دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة لتكن.

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ مستمرتين

في x_0 حيث $x_0 \in S \cap T$ فإن.

1- $f + g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة في x_0

2- $f \cdot g : S \cap T \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة في x_0.

3- $\frac{f}{g} : (S \cap T) - \{x : g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة في x_0

كما أن تركيب دوال مستمرة هي دالة مستمرة إذا كان.

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{مستمرة}]{f} f(S) \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

نحصل على دالة.

$h : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة مستمرة.

$$x \longmapsto h(x) = (g \circ f)(x)$$

مبرهنة القيمة الوسطى.

لتكن f دالة معرفة ، مستمرة على مجموعة جزئية.

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

و S مترابطة ولتكن $x, y \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$

حيث

$$f(x) < \alpha < f(y)$$

عندئذ توجد

$$\exists B \in S : \alpha = f(B)$$

تمرين .

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية S من $\mathbb{R}^n$

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

نقول أنها محدودة من الأعلى إذا كانت قيمها $f(S)$ محدودة من الأعلى ونقول عن f أنها محدودة من الأدنى إذا كانت قيمها $f(S)$ محدودة من الأدنى وإذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى فهي محدودة.
وعندما تكون f غير خالية ومحدودة من الأعلى فإن مسلمة التمام تؤكد أن لـ $f(S)$ حد أعلى $\sup f(S)$: يدعى هذا الحد الحد الأعلى لـ f ويرمز له بـ $\sup f$ أي $\sup\limits_{x \in S} f(x)$ ونعرف الحد الأدنى لـ f التي نرمز له بـ $\inf f$ وتجدر بنا ملاحظة أن $\sup f$ إذا كان موجوداً هو عدد ثابت مستقل عن x كذلك فقد يكون $\sup f$ قيمة لـ f وقد لا يكون . بمعنى أنه قد يوجد نقطة x_0 من S حيث يكون $f(x_0) = \sup f$ وقد لا تكون هذه النقطة موجودة ونقول أن $\sup f$ هو القيمة الأكبر للدالة f على S ويتم مشابه بما يتعلق بـ $\inf f$.

الاستمرار المنتظم

لتكن f دالة معرفة على مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ومستمرة في $\mathbb{R}$
نقول عن f أنها مستمرة بانتظام على S إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall \epsilon > 0 ; \exists \delta(\epsilon) > 0 , \quad x_1, x_2 \in S$$

$$\| x_1 - x_2 \| < \delta \Rightarrow | f(x_1) - f(x_2) | < \epsilon$$

انتهيت