F. SC.　　　　المعادلات التفاضلية (2)

date 19/12/2019

مقدمة: عن المعادلات التفاضلية العادية

ما هي المعادلة التفاضلية؟

تعريف (1): المعادلة التفاضلية هي كل معادلة تحقق علاقة بين المتحول المستقل x والدالة المجهولة $y=f(x)$ ومشتقاتها المتتالية ويعبر عن المعادلة التفاضلية بالشكل:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad (1)$$

ما هي المعادلة التفاضلية العادية؟

هي المعادلة من الشكل (1) حيث الدالة $y=y(x)$ تابعة لمتحول مستقل واحد x. حيث نركز في ما يلي على المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبتين الأولى والثانية:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad ;$$

$EX(1)$: $y' = M(x)\, y + f(x)$

$E(2)$: $y'' + N(x)\, y' + M(x)\, y = f(x) \quad ; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

- إذا كانت الدالة $f(x)=0$ فإن المعادلة (1)، (2) تكون متجانسة (أو إذا كانت الدالة الثابتة $y(x)\equiv 0$ حلاً فإن المعادلة تكون متجانسة). هذا وتتصف المعادلة الخطية المتجانسة بالصفة التالية:
- إذا كان $y_1(x), y_2(x)$ حلين لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة فإن التركيب الخطي بالحلين $y_1(x), y_2(x)$ يكون أيضاً حلاً لها. وذلك من أجل أي اختيار للثابتين c_1, c_2
- ملاحظة:

ملاحظة: إن عدد الثوابت الاختيارية في الحل العام للمعادلة العادية التفاضلية (1) والذي له الشكل $y=f(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ يحوي عدداً من الثوابت (البارامترات) الاختيارية $c_1,c_2,\dots,c_n$ (المستقلة فيما بينها). وعدد هذه الثوابت يساوي مرتبة المعادلة التفاضلية.

ملاحظة: إن الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة من مجموع حل خاص (أي أنه أي حل) للمعادلة غير المتجانسة والحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة (المشاركة (أي التي تنتج باستبدال $f(x)$ بالصفر).

- المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق

• إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق هو: (1a)

$$f(x,y,y')=0$$

وكما نلاحظ هي علاقة بين التابع y والمتغير x ومشتق التابع y'.

• إذا تمكنا من حل المعادلة (1a) بالنسبة لـ y' نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل (1b) $y'=f(x,y)$

حيث نميز نوعان: 1- المعادلات التي تقبل فصل متغيراتها (قابلة لفصل المتغيرات): وهذه المعادلة تكتب بالشكل $\frac{dy}{dx}=f(x)$ أي أن المشتق تابع لـ x فقط، وحلها هو

$$y=\int f(x)\,dx+c$$

وهذه المعادلة تمثل أبسط المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق. وفي الحقيقة إن تعريف التكامل

اللامحدود في الحل هو أنه دالة مشتقها هي $f(x)$ فمثلاً المعادلة التفاضلية :

$y' = \frac{dy}{dx} = \sin x$ حلاها هو $y = y(x) = -\cos x + c$

لأن مشتقة $-\cos x$ هو $\sin x$.

<u>ملاحظة</u>: هناك صيغة أخرى لكتابة $y(x)$ هي:

$$y(x) = c' + (1-\cos x)$$

حيث مشتقة $1-\cos x$ هو أيضاً $\sin x$. وبالطبع يجب أن يختلف الثابتات c, c' بواحد صحيح حتى تكون الدالة $y(x)$ نفس الفئة .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = \sin\frac{2}{3}x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \sin\frac{2}{3}x \Rightarrow dy = \sin\frac{2}{3}x\,dx \Rightarrow$$

$$\int dy = \int \sin\frac{2}{3}x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3} + c$$

وهو الحل العام حيث c ثابت كيفي.

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^3 y' = 6 + x$$

الحل:

من المعادلة المعطاة نجد

$$y' = \frac{6+x}{x^3} \Rightarrow dy = 6\int\frac{dx}{x^3} + \int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-3}{x^3} - \frac{1}{x} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاة حيث c ثابت كيفي.

(b) المعادلة (1b) $y' = f(x,y)$ من الشكل: $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$

أي من الشكل على سبيل المثال $\dfrac{dy}{dx} = ky$ ~~وهذه المعادلة~~

الحل العام ولإيجاد الحل العام رح نكتب بالشكل: $\dfrac{dy}{y} = k\,dx$

بالمكاملة نجد $\ln|y| = kx + \ln|c|$ ومنه فإن

c ثابت كيفي ; $y = c\,e^{kx}$ وهو الحل العام رح

ملاحظة: إن الحل العام $y(x)$ يقترب من الصفر عندما يتزايد x بشرط أن يكون k ثابتاً سالباً. وفي الحالة العكسية عندما تكون k ثابتاً موجباً فإن الحل يزداد كلما تزايد المتحول x.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' + 3y + 5 = 0$$

الحل: من المعادلة المعطاة نجد أن:

$$y' = -(3y+5) \Rightarrow$$

بالمكاملة نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = -(3y+5) \Rightarrow \frac{dy}{3y+5} = -dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3\,dy}{3y+5} = -\int dx \Rightarrow \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3y+5}{c}\right| = -x \Rightarrow \ln\left|\frac{3y+5}{c}\right| = -3x$$

$$\Rightarrow 3y+5 = c\,e^{-3x} \Rightarrow y = \frac{c}{3}e^{-3x} - \frac{5}{3}$$

وهو الحل العام حيث c: ثابت كيفي.

C- المعادلة (1b) من الشكل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(y)}{h(x)} \;,\; \frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \quad (*)$$

ثم نجد بالمكاملة: الحل العام. $\int g(y)dy = \int h(x)dx + c$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = \frac{-y}{x-2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x-2} \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| + \ln|x-2| = 0 \Rightarrow y(x-2) = c \Rightarrow y = \frac{c}{x-2} \; ; \; c \neq 0, \; x \neq 0$$

الحل العام.

2- المعادلات التي تؤول إلى منفصلة المتغيرات

أ) كل معادلة من الشكل

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+d) \; ; \; a, b, d \text{ ثوابت محددة}$$

ويمكن تحويلها إلى معادلة منفصلة المتغيرات بأن نفرض:

$$z = ax+by+d \Leftarrow z' = a + by' \Leftarrow y' = \frac{z'-a}{b}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \Rightarrow z' - a = bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + bf(z) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$

وهي معادلة منفصلة المتغيرات

وللحصول على الحل العام نكامل طرفي المعادلة السابقة فنجد:

$$\int \frac{dz}{a+bf(z)} = \int dx = x + c \Rightarrow \phi(z) = x + c$$

وبعدها نعوض بقيمة z من العلاقات السابقة في العلاقة الأخيرة فنحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=2x-y+3$$

الحل: لحل هذه المعادلة التفاضلية نفرض أن:

$$z=2x-y+3 \Rightarrow z'=2-y' \Rightarrow y'=2-z'$$

بالتعويض بالمعادلة المعطاة نجد:

$$z'=\frac{dz}{dx}=2-z \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \Rightarrow -\ln\left|\frac{2-z}{c}\right|=x \Rightarrow \frac{2-z}{c}=e^{-x} \Rightarrow$$

$$z=2-ce^{-x} \xRightarrow[\text{بقيمة } z]{\text{نعوض}} 2x-y+3=2-ce^{-x} \Rightarrow y=2x+ce^{-x}+1$$

وهو الحل العام

- نحل معادلات من الشكل (I)

$$f(x)\cdot g(y)\,dx+f_1(x)\cdot g_1(y)\,dy=0$$

تدعى معادلة منفصلة المتغيرات ويمكن فصل متغيراتها بأن نقسم طرفي المعادلة على $f_1(x)\cdot g(y)\neq 0$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x(y^2-1)\,dx+y\cdot(x^2-1)\,dy=0$$

الحل: نقسم طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة على المقدار $(x^2-1)(y^2-1)\neq 0$ نجد:

$$\frac{x}{x^2-1}\,dx+\frac{y}{y^2-1}\,dy=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2-1}\,dy=-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2-1}{c}\right|=-\frac{1}{2}\ln|x^2-1| \Rightarrow \ln\left|\frac{y^2-1}{c}\right|=\ln\left|\frac{1}{x^2-1}\right| \Rightarrow \frac{y^2-1}{c}=\frac{1}{x^2-1} \Rightarrow$$

$$y^2-1=\frac{c}{x^2-1} \Rightarrow (y^2-1)(x^2-1)=c$$

- عندما $y^2-1=0$ تكون $y=\pm 1$ وهما حلان خاصان للمعادلة لأنه يمكن الحصول عليها بإعطاء الثابت c وبالتالي وبالتالي لم نفقد أي حل من جراء التقسيم على المقدار: $(y^2-1)(x^2-1)\neq 0$ وهو الحل العام للمعادلة المعطاة حيث c: ثابت كيفي.

تمرين: حل المعادلة التفاضلية $y'-2x(y^2+1)=0$

الجواب: بفصل المتغيرات والمكاملة نجد الحل العام: $\arctan y=x^2+c$

d) لتكن المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = g(x)$

لمانّ الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالصيغة

$$y = c_1 + c_1 x + \int\left(\int g(x)\,dx\right)dx$$

• هذا النوع يمثل النوع الأبسط للمعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية
كما نلاحظ أنّ عملية تكامل واحدة لكلا الطرفين للمعادلة تؤدي إلى
$\frac{dy}{dx} = c_1 + G(x)$ حيث $G(x)$ هي التكامل اللامحدود للدالة $g(x)$
وهذه المعادلة تتفق مع المعادلة (a) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ بالطرف الأيمن
حيث $f(x) = c_1 + G(x)$ ونلاحظ هنا أنّ حل المعادلة التفاضلية يتضمن
عمليتي تكامل مما يظهر ثابتين اختياريين.