حل المعادلات التفاضلية العادية

تعاريف أساسية:

نسمي مجموعة المعادلات التفاضلية

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\
&\psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0 \\
&\quad - - - - - - \\
&\psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

حيث $y_1, y_2, \ldots, y_n$ دوال مجهولة في المتغير x أي $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(x)$

جملة معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الأولى

إذا كانت الجملة (1) قابلة للحل بالنسبة لمشتقات الدوال المجهولة

$y_1', y_2', \ldots, y_n'$ فعندئذ يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= \frac{dy_1}{dx} = h_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
(y_2' =)\ \frac{dy_2}{dx} &= h_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\quad - - - - - - \\
(y_n' =)\ \frac{dy_n}{dx} &= h_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

إن الجملة (2) تسمى جملة معادلات تفاضلية نظامية من المرتبة n

ملاحظة إن عدد المعادلات المشكلة للجملة (2) يعرف مرتبة تلك الجملة لذلك فالجملة (2) من المرتبة (n)

يمكن أيضاً كتابة الجملة النظامية بالشكل الآتي

$$\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad ; \quad i = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

أي أن:

$$\frac{dy_i}{h_i} = dx \Rightarrow \frac{dy_1}{h_1} = \frac{dy_2}{h_2} = \ldots = \frac{dy_n}{h_n} = dx \qquad (4)$$

وسوف نهتم في هذا الفصل بدراسة الجمل التفاضلية النظامية لكثرة ورودها من جهة ولأنه كما سنبين من خلال بعض الأمثلة المحلولة أن أي جملة تفاضلية غير نظامية من الشكل (1) يمكن ردها إلى جملة تفاضلية نظامية وذلك باختيارنا لعدد من الدوال المناسبة.

• لنعرف المتجهين:

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

عندئذ فإن الجملة (3) يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{dY}{dx} = H(x, Y) \qquad (5)$$

الآن إذا كانت الجملة (1) نظامية وخطية فإن الدوال h_i تكون خطية في الدوال y_i ونكتب (3) بالشكل التالي:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j + g_i(x) \quad ; \quad i = 1, \ldots, n \qquad (6)$$

وهذه مجموعة معادلات خطية ويمكن كتابتها بالشكل المفصل كما يلي

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + g_1(x)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x)$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x)$$

ما هو حل الجملة النظامية ؟

حل الجملة النظامية :

نقول عن مجموعة الدوال التوابع $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ (7)

إنها حل للجملة النظامية (3) في مجال ما I إذا كانت مستمرة وقابلة للاشتقاق في المجال I ، وإذا هي انقلبت مجموعة المعادلات إلى مجموعة مطابقات من أجل هذه الدوال (7) وذلك من أجل جميع قيم x من المجال المذكور (أي إذا تحولت جملة المعادلات من أجل تلك التوابع إلى مطابقة من أجل جميع $x \in I$). هذا يعني أن :

$$\frac{dy_i}{dx} \equiv h_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

وهذا يطابق :

$$\frac{dy_i}{h_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))} = dx \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

أو :

$$\frac{dy_1}{h_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))} = \frac{dy_2}{h_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))} = \cdots = \frac{dy_n}{h_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))} = dx$$

وهنا نلاحظ أن كل حل للجملة التفاضلية له شكل دالة متجهة:

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$$

ويدل هذا على أن كل حل للجملة يمثل منحنيا في الفضاء النوني $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ يلعب فيه المتحول x دور الوسيط.

• هذا يعني إذاً حل الجملة (3) إيجاد كل المنحنيات في $\mathbb{R}^n$ التي تمس في كل نقطة من ساحة الحقل $H = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))$ في تلك النقطة، وبالنسبة للحقل فإن هذه المنحنيات هي خطوط الحقل وهي بالنسبة للجملة التفاضلية منحنياتها التكاملية.

• يمكن تفسير الحل (7) للجملة بشكل آخر، بالنظر إلى $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ كنقطة كيفية من فضاء بعده $(n+1)$ فإن المعادلات (7) تمثل n سطحاً أسطوانياً في هذا الفضاء وتتقاطع هذه السطوح في منحني تكاملي للجملة.

سنعرض فيما يلي أمثلة نشرح فيها كيف نجد الحل أو التكامل العام لجملة معادلتين ونمهد فيها لمفهوم التكامل الأولي للجملة التفاضلية.

تمرين (1)

لتكن لدينا جملة المعادلتين التفاضليتين:

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 \\[2mm] \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

1- لحل هذه الجملة نحذف أحد الدالتين ومشتقها ولتكن مثلاً لنحذف الدالة y_2 ومشتقها y_2' عندئذ ~~نجد~~ من الجملة،

من المعادلة الأولى نجد:

$$y_2 = y_1' - 2y_1 \qquad (9)$$

بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد:

$$y_1'' - 2y_1' = y_1 + 2y_2 = y_1 + 2(y_1' - 2y_1) \Longrightarrow$$

$$y_1'' - 4y_1' + 3y_1 = 0 \qquad (I)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية متجانسة وحلها العام يعطى بالشكل

$$y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة (I) p.366 كتابي

إن المعادلة (I) تمثل معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ومتجانسة ذات أمثال ثابتة وهي من الشكل

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \;;\; a_1, a_2 \text{ ثوابت}$$

من أجل حل هذه المعادلة نكتب هذه المعادلة بدلالة المؤثر D فنحصل

$$(D^2 - 4D + 3)y_1 = 0$$

والمعادلة المميزة لها هي $K^2 - 4K + 3 = 0$

فالمعادلة ذات جذرين حقيقيين مختلفين لأن $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$

$$K_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{cases} K_1 = 3 \\ K_2 = 1 \end{cases}$$

وبالتالي نحصل على حلين خاصين $y_1 = c_1 e^{K_1 x}$, $y_2 = c_2 e^{K_2 x}$ وهما مستقلان خطياً وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو:

$$y_1 = c_1 e^{K_1 x} + c_2 e^{K_2 x} \xRightarrow{(3,1)} y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

بالتعويض عن أجل (y_1) في (9) نجد :

$$y_2 = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - 2c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{x} \Rightarrow \boxed{y_2 = c_1 e^{3x} - c_2 e^{x}}$$

إذاً

$$y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} \qquad (10)$$
$$y_2 = c_1 e^{3x} - c_2 e^{x}$$

إن المعادلات (10) تعيينات الحل العام للجملة
ع ثابتين كيفيين اثنين c_1, c_2 وهو ما يساوي رتبة الجملة ، وتحوي عبارته كما نرى

تعين المعادلات (10) الحل العام للجملة وتحوي عبارته كما نرى على ثابتين كيفيين اثنين وهو ما يساوي رتبة الجملة .

تمثل المعادلات (10) أسرة ذات وسيطين c_1, c_2 من المنحنيات في الفراغ الثلاثي (x, y_1, y_2) وهي المنحنيات التكاملية للجملة وتنشأ هذه المنحنيات من تقاطع أسرتي السطوح (10) من أجل كل قيمة للثنائية (c_1, c_2) نحصل على حل خاص للجملة ، ومثلاً من أجل $(c_1, c_2) = (0, 1)$ نحصل على الحل الخاص $(y_1, y_2) = (e^{x}, -e^{x})$ وهو يمثل منحنياً معيناً بالسطحين $y_1 = e^{x}$ و $y_2 = -e^{x}$ في الفراغ IR^3 .

(ب) هل يمر من كل نقطة من الفضاء IR^3 منحنٍ تكاملي للجملة ؟

للإجابة عن هذا السؤال نرى أن المعادلات (10) محلولة بالنسبة لـ c_1, c_2 وأن معين الأمثال هو :

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(c_1, c_2)} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{x} \\ e^{3x} & -e^{x} \end{vmatrix} = -2e^{4x} \neq 0$$

وتقبل بالتالي المعادلات (١٥) دوماً الحل بالنسبة الى c_1, c_2 ويكون

$$c_1 = -\frac{1}{2} e^{-4x} \begin{vmatrix} y_1 & e^{x} \\ y_2 & -e^{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{-3x}$$

$$c_2 = \frac{1}{2} e^{-x} (y_1 - y_2)$$

نستنتج إذاً أنه مهما تكن النقطة $(x, y_1, y_2) = (\alpha, \beta, \lambda)$ فتوجد قيمة وحيدة لـ c_1, c_2 وهي:

$$c_1 = \left(\frac{1}{2}\right) e^{-3\alpha} (\beta + \lambda)$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{2}\right) e^{-\alpha} (\beta - \lambda) \qquad (11)$$

تكون من أجلها الحل (١٥) ماراً من النقطة (α, β, λ) وبالفعل بتعويض (c_1, c_2) من (11) ~~في~~ في (١٥) نجد حلاً خاصاً ونعوض فيه $x = \alpha$ نجد ان:

$$y_1\Big|_{x=\alpha} = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (\beta + \lambda) e^{3\alpha} + \frac{1}{2} e^{-\alpha} (\beta - \lambda) = \beta$$

$$y_2\Big|_{x=\alpha} = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (\beta + \lambda) e^{3\alpha} - \frac{1}{2} e^{-\alpha} (\beta - \lambda) = \lambda$$

إذاً يمر من كل نقطة من $\mathbb{R}^3$ منحني تكاملي وحيد للجملة المعطاة.

(ج) طريقة أخرى في حل الجملة:

نجمع المعادلتين (1) فنجد:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_1 + y_2 + 2y_2$$

ت ج

P. 118

تمرين (2) لتكن لدينا الجملة:

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 1$$

بالمكاملة نجد الحل العام وهو:

$$y = x + c_1$$

$$z = x + c_2$$

وهو يمثل أسرة مستقيمات ذات وسيطين ويمكن تعيين (c_1, c_2) حيث عن مستقيم من هذه الأسرة من نقطة كيفية معطاة (x_0, y_0, z_0) وبالفعل فإن الحل:

$$y = x - x_0 + y_0$$

$$z = x - x_0 + z_0$$

يمر من هذه النقطة لاحظ أنه يمكن كتابة جملة المعادلتين السابقتين بالشكل

$$dx = dy = dz$$

تمرين (3) لتكن لدينا الجملة:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$x\,dx + y\,dy = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$x^2 + y^2 = c_1$$

إن كل حل للجملة يحقق كلاً من معادلتيها وبالتالي فهو يحقق العلاقة الأخيرة التي تؤلف تكاملاً أولياً للجملة. نجد أن $z = c_2$ تكامل أولي ثان للجملة ويكون الحل العام معطى

ويكون الحل العام معطى بالمعادلتين

$$x^2+y^2=c_1$$
$$z=c_2$$

وهو يمثل أسرة الدوائر الموازية للمستوي xoy التي تقع مراكزها على المحور oz تنشأ هذه الأسرة من تقاطع أسرة الأسطوانات التي محورها المشترك oz مع أسرة المستويات الموازية للمستوي xoy. لاحظ أنه يمكن كتابة الجملة السابقة بالشكل:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{dx}\ ,\ dz=0$$

أو بالشكل:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{0}$$