تسمى المعادلة التفاضلية الناتجة من جملة المعادلات التفاضلية (2،
$\left(\frac{dy_i}{dx} = h_i(x, y_1, \dots, y_n)\;;\; i = 1, \dots, n\right)$
بعمليات جبرية تركيبًا قابلًا للمكاملة إذا كانت هذه المعادلة عبارة عن تفاضل تام لدالة $\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ أي
$d\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$
وبمكاملة الطرفين نجد:
$\phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c$ (*)
حيث c ثابت اختياري تسمى هذه المعادلة تكاملًا أوليًا لجملة المعادلات التفاضلية (2) .

- إذا علمنا n تكاملًا أوليًا مستقلًا خطيًا للجملة التفاضلية من المرتبة n (2)
$\phi_1(x, y_1, \dots, y_n)$ ، $\phi_2(x, y_1, \dots, y_n)$ ، ... ، $\phi_n(x, y_1, \dots, y_n)$
فإن مجموعة المعادلات:
$\phi_i(x, y_1, \dots, y_n) = c_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ (**)
تمثل التكامل العام للجملة (2) ويمكن من التكامل العام ~~للجملة (2)~~ الحصول عمليًا على أي حل لهذه الجملة وذلك بحل المعادلات (**) بالنسبة إلى $y_1, y_2, \dots, y_n$.

- إذا علمنا تكاملًا أوليًا لا يطابق الثابت للجملة التفاضلية (2) (*) بالنسبة إلى أحد متغيراتها وليكن مثلًا y_n : فإنه بحل المعادلة
$y_n = \varphi(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, c)$ (***)
وبتعويض (***) في أول (n-1) معادلة من معادلات الجملة (2) نحصل على جملة معادلات تفاضلية جديدة من المرتبة (n-1).

طرائق حل المعادلات التفاضلية النظامية :

أولاً - طريقة الحذف: كما رأينا سابقاً إذ يمكن حل كثير من الجمل النظامية برد الجملة من المرتبة n إلى معادلة تفاضلية من المرتبة n بدالة مجهولة واحدة أو إلى عدة معادلات تفاضلية مجموع مرتباتها يساوي n ويتم ذلك عن طريق التفاضل المتتالي لمعادلة واحدة من معادلات الجملة وحذف جميع الدوال المجهولة باستثناء أحدها. وبتكامل المعادلة الناتجة نحصل على دالة من الدوال المجهولة ونعين الدوال المجهولة الباقية من معادلات الجمل التفاضلية الأصلية ومن المعادلات الناتجة من تفاضلها

مثال: أوجد حل الجملة

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$$

المحققة للشروط $y(0)=-1 , z(0)=1$

الحل: لنوجد الحل العام لهذه الجملة بطريقة الحذف لذلك نفاضل طرفي المعادلة الثانية فنجد:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{(y-x)^2}\left(\frac{dy}{dx}-1\right)$$

نحذف y و y' من المعادلة الناتجة وذلك بالتعويض من معادلات الجملة فنجد:

$\frac{1}{y-x}$ و $\left(\frac{dy}{x}-\right)$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(+\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow z'' = \frac{z'^2}{z}$$

وبتبديل: نقسم طرفي المعادلة على z' فنجد:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z} \Rightarrow \frac{\frac{dz'}{dx}}{z'} = \frac{\frac{dz}{dx}}{z} \Rightarrow \frac{1}{z'}\frac{dz'}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

بضرب طرفي المساواة بـ $dx \neq 0$ نجد

$$\frac{dz'}{z'} = \frac{dz}{z} \overset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \ln\frac{z'}{c_1} = \ln|z| \Rightarrow \boxed{z' = c_1 z} \Rightarrow$$

$$Z' = c_1 Z \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = c_1 Z \Rightarrow \frac{dZ}{Z} = c_1 dx \Rightarrow$$ 1 - 3

$$\ln\left|\frac{Z}{c_2}\right| = c_1 x \Rightarrow \text{,} \quad Z = c_2 e^{c_1 x}$$ لإيجاد y نعوض

ومنه Z التي حصلنا عليها من العلاقة في المعادلة الأولى الثانية من معادلات الجملة

أي في المعادلة $\frac{1}{y-x} = Z$ فنجد

$$y - x = \frac{1}{Z} \Rightarrow y = x + \frac{1}{Z} \Rightarrow$$

$$y = x + \frac{1}{c_1 c_2 e^{c_1 x}} = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}$$

وعليه فإن عبارة الحل العام للجملة :

حيث c_1 و c_2 ثابتات اختيارية

$$\left\{ y = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x} \quad , \quad Z = c_2 e^{c_1 x} \right\}$$

لإيجاد حل مسألة كوشي المطلوب نعوض في عبارة الحل العام : $y = 1$ و $Z = 1$ و $x = 0$ فنجد : $c_2 = 1$ ، $c_1 = -1$ وعليه فإن الحل المطلوب

$$\left\{ y = x - e^{x} \quad , \quad Z = e^{-x} \right\}$$

ثانيا - طريقة التكاملات المتتالية

إذا كانت الجملة التفاضلية مؤلفة من n معادلة من المرتبة الأولى وكل معادلة تحوي دالة مجهولة واحدة، أي أن الجملة من النمط :

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1) \, , \, \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2) \, , \, \ldots \, , \, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n)$$

فإن حل هذه الجملة يؤول إلى حل كل معادلة من هذه المعادلات على حدة.

وإذا كانت الجملة من الشرط:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1),\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \ldots, \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

فإن تكاملها يتم بالتتالي حيث تكامل المعادلة الأولى ونعوض الحل العام الناتج في المعادلة الثانية ونكاملها ونتابع هكذا

مثال (1): أوجد الحل العام للجملة:

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x \ (1),\quad \frac{dz}{dx} = y\, e^{\cos x} \ (2)$$

الحل: نحل المعادلة الأولى بغض النظر عن المعادلة الثانية:

$$\frac{dy}{y} = \sin x\, dx \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\left|\frac{y}{c_1}\right| = -\cos x \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{-\cos x}}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من معادلات الجملة فنجد:

$$\frac{dz}{dx} = c_1 e^{-\cos x} e^{\cos x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = c_1 \Rightarrow \boxed{z = c_1 x + c_2}$$

ومنه فإن الحل العام للجملة المعطاة:

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان و

$$y = c_1 e^{-\cos x},\quad z = c_1 x + c_2$$

ثالثاً- طريقة التكاملات الأولية:

نقول تركيب قابل للمكاملة لجملة معادلات تفاضلية معادلة تفاضلية تنتج من جملة معادلات تفاضلية بعمليات جبرية وبحيث تكون هذه المعادلة التفاضلية قابلة للمكاملة مباشرة أي تمثل تفاضلاً تاماً للدالة $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ أي أن التركيب القابل للمكاملة يكتب بالشكل:

$d\,\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ وبالمكاملة نحصل على التكامل الأولي

$$\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c$$

وإذا أمكن إيجاد تكامل أولي واحد فإننا نستطيع تخفيض مرتبة الجملة التفاضلية مرة واحدة ، وهكذا إذا استطعنا إيجاد n تكاملاً أوليًا مستقلاً عطيًا من أجل جملة مؤلفة من n معادلة، فإن هذا يعني أننا وجدنا التكامل العام لهذه الجملة ،

ملاحظة: يكون من المفيد أحيانًا كتابة الجملة المعطاة بالشكل المتناظر لتسهيل إيجاد التراكيب القابلة للمكاملة وذلك باستخدام إحدى الطرائق التالية:

1- المكاملة المباشرة لـ n من هذه النسب

2- حساب تكامل أول من هذه النسب المتساوية والتي عددها $n+1$، ومن ثم نعوض هذا التكامل في النسب الأخرى لحساب تكامل ثانٍ وهكذا للحصول على n تكامل أولي.

3- طريقة الأمثال غير المعينة وذلك بالاستفادة من خواص التناسب

$$\frac{dy_1}{h_1} = \frac{dy_2}{h_2} = \dots = \frac{dy_n}{h_n} = \frac{dx}{1} \equiv \frac{\alpha_1\,dy_1 + \alpha_2\,dy_2 + \dots + \alpha_n\,dy_n + \beta\,dx}{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_n h_n + \beta}$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ أمثال غير معينة يتم اختيارها بحيث يصبح البسط تفاضلاً تامًا للمقام في الطرف الأيمن، أو بحيث ينعدم المقام ويكون البسط عبارة عن تفاضل تام لدالة ما.

مثال: أوجد الحل العام للجملة

$$\left\{ \frac{dy}{dx} = z \ ^{(1)}, \quad \frac{dz}{dx} = -y \ ^{(2)} \right\}$$

الحل: لإيجاد تركيب قابل للمكاملة من هذه الجملة نضرب الجملة الأولى بـ y والثانية بـ z ونجمع فنجد:

$$y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0 \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} y^2+z^2=c_1^2 \Rightarrow \boxed{z=\sqrt{c_1^2-y^2}}$$

وهو يمثل تكاملاً أوليًا للجملة، نختار القيمة الموجبة لـ z حيث إن الإشارة السالبة تعطي نفس النتيجة. ونتابع بأسلوب مشابه

نعوض قيمة z في المعادلة الأولى من معادلات الجملة من المرتبة الأولى: فنحصل على معادلة تفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{c_1^2-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}} = dx \xrightarrow{\text{بالمكاملة}}$$

$$\arcsin\frac{y}{c_1} = x + c_2$$

وهو تكامل أولي آخر للجملة المعطاة والتكاملات الأوليات مستقلات خطيًا وعليه فإن الحل العام للجملة: حيث c_1, c_2 ثابتات اختيارية.

$$\left\{ z=\sqrt{c_1^2-y^2}, \quad \arcsin\frac{y}{c_1}=x+c_2 \right\}$$

<u>ملاحظة</u>: يمكن حل هذا التمرين <u>بطريقة الحذف</u>:

نعوض z من المعادلة الأولى في الثانية فنجد:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$ وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

بأمثال ثابتة - الحل: بالاستبدال بدلالة المؤثر التفاضلي $D^2+1=0$

إذن المعادلة المميزة لها هي: $k^2+1=0$ و $\Delta = 4i^2$

للمعادلة جذران عقديان هما $k_1=2i$ ، $k_2=-2i$

الحل العام لها هو

$y_1=\cos 2x+i\sin 2x$ ، $y_2=\cos 2x-i\sin 2x$

إذن الحل العام هو

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

مثال: أوجد الحل العام للجملة

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$$

الحل: نشكل تركيبات قابلات للمكاملة باستخدام خواص النسب:

ومنه فإن:

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0}$$

$dx+dy+dz=0 \Rightarrow d(x+y+z)=0 \Rightarrow \boxed{x+y+z=c_1}$ وهو تكامل أول للجملة ولحساب التكامل الأولي الآخر نضرب البسط والمقام في الجملة المعطاة بـ $2x$ و $2y$ و $2z$ بالترتيب ومن ثم نجمع:

$$\frac{2x\,dx}{2x(z-y)}=\frac{2y\,dy}{2y(x-z)}=\frac{2z\,dz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$$

ومنه نجد التكامل الأولي الآخر:

$$x^2+y^2+z^2=c_2^2$$

وبما كان التكاملات الأوليان مستقلات خطيًا حيث c_1 و c_2 ثابتات اختياريان فإن الحل العام للجملة:

$$\{x+y+z=c_1 \quad , \quad x^2+y^2+z^2=c_2^2\}$$

تمارين

P 139
وكتالي
P.466

تمرين (1): حل جملة المعادلتين بطريقة الحذف:

$$\frac{dy}{dx}=3y-2z \ ^{(1)} \quad , \quad \frac{dz}{dx}=2y-z \ ^{(2)}$$

الحل: باشتقاق المعادلة الأولى نجد:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=3\frac{dy}{dx}-2\frac{dz}{dx}$$

أو بالشكل: $y''=3y'-2z'$ وبتعويض y' و z' بما يساويهما من الجملة نجد:

$$y''=3(3y-2z)-2(2y-z) \Rightarrow y''=9y-6z-4y+2z \Rightarrow$$

$$y''=5y-4z \quad (I)$$

من المعادلة الأولى نجد:

$$z=\frac{1}{2}(3y-y') \quad (II)$$

بالتعويض في (I) نجد:

$$y'' = 5y - 2(3y - y') \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$$

إذن $y''-2y'+y=0$ نحلها باستخدام المؤثر التفاضلي

المعادلة المميزة لها: $D^2-2D+1=0 \Rightarrow K^2-2K+1=0$

$\Delta = 4-4=0$ للمعادلة جذر مضاعف هو $K=K_1=K_2=1$

إذاً للمعادلة حلان خاصان مستقلان خطياً هما $y_1=e^x \,,\, y_2=xe^x$

وبالتالي فالحل العام لها يعطى بالعلاقة:

$$y=c_1e^x+c_2xe^x \Rightarrow y=(c_1+c_2x)e^x$$

بالتعويض في عبارة z من أجل العلاقة (II) نحصل على:

$$\Rightarrow z=\frac{1}{2}(3c_1e^x+3c_2xe^x-c_1e^x-c_2e^x-c_2xe^x)$$

$$\Rightarrow z=\left(c_1+c_2x-\frac{c_2}{2}\right)e^x$$

تمرين: أوجد حل جملة المعادلتين

$$\frac{dy}{dx}=z \ (1) \,,\quad \frac{dz}{dx}=-y \ (2)$$

الحل: بمفاضلة المعادلة الأولى بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx} \,,\ \xrightarrow{\text{نبدل في المعادلة الثانية فنجد}}\ \frac{d^2y}{dx^2}=-y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \Rightarrow$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ذات مثال $y''+y=0$

بالنسبة للحل العام لها $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ بالتعويض بقيمة y في المعادلة الأولى فنجد:

$$z=\frac{dy}{dx}=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

وبالتالي فإن الحل العام للجملة المعطاة هو:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

تمرين: حل بطريقة الحذف الجملة التالية:

$$\frac{dy}{dx} = z \;,\; \frac{dz}{dx} = u \;,\; \frac{du}{dx} = u + z - y + x - 1$$

الحل: نشتق المعادلة الأولى بالنسبة لـ x فنجد:

$$y'' = z' = u$$

بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ x نجد:

$$y''' = z'' = u' = u + z - y + x - 1$$

هذا يعني أن: $y''' = u' = u + z - y + x - 1 \Leftarrow$

$$y''' = y'' + y' - y + x - 1$$

وبالتالي فإن:

$$y''' - y'' - y' + y = x - 1 \quad (a)$$

والحل العام لهذه المعادلة باستخدام المؤثر التفاضلي

$$D^3 - D^2 - D + 1 = x - 1$$

$$y = (Ax + B)e^{x} + ce^{-x} + x$$

$$z = (Ax + B)e^{x} + Ae^{x} - ce^{-x} + 1$$

$$u = (Ax + B)e^{x} + 2Ae^{x} + ce^{-x}$$

طريقة إيجاد الحل العام:

إن الحل العام للمعادلة (a) يعطى بالعلاقة

$$y = y_c + y_p$$

حيث y_c: الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة و y_p حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (a)

إيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة:

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

با ستخدام ~~...~~ المؤثر التفاضلي نجد :

$$D^3 - D^2 - D + 1 = 0 \xRightarrow{\text{المعادلة المميزة}} k^3 - k^2 - k + 1 = 0$$

نلاحظ أن $k=1$ جذر للمعادلة المميزة $\Leftarrow$

$$\Leftarrow (k-1)(k^2-1) = 0$$

$$(k-1)(k-1)(k+1) = 0 \Rightarrow (k-1)^2(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$ جذر مضاعف

و $k_3 = -1$ جذر بسيط وبالتالي فالحل العام لها هو

$$y_c = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x}$$

<u>١- إيجاد الحل الخاص (y_p):</u>

ان الحل الخاص y_p فيمكن تعيينه بطريقة تغيير الثوابت (طريقة لاغرانج)

لإيجاد الحل الخاص نعتبر $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$ و $c_3 = c_3(x)$ ونفتش عن الحل الخاص

من الشكل الآتي :

$$y_p = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x + c_3(x)e^{-x}$$

ولنشكل مجموعة المعادلات الجبرية

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)$$