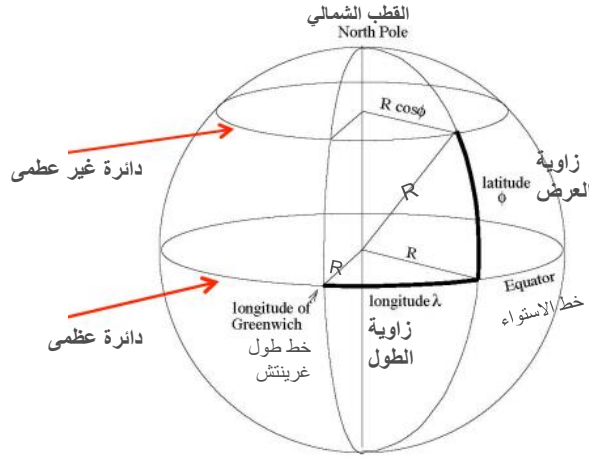
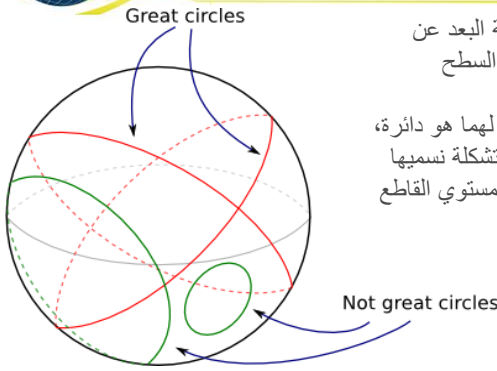
دوائر العرض (المتوازيات) واقطارها

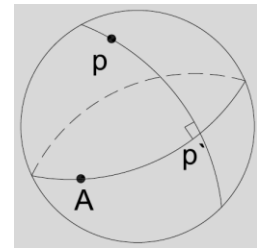
احسب طول قوس مقابل لثانية ستينية واحدة على خط الاستواء وعلى مدار السرطان الموافق لزاوية العرض 23° 26' 10.8''



السطح الكروي : مفاهيم وتعاريف



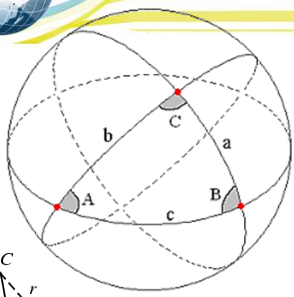
السطح الكروي هو المحّل الهندسي للنقاط متساوية البعد عن نقطة محددة تدعى مركز الكرة. بعد أيّ نقطة من السطح الكروي عن المركز هو نصف قطر الكرة.
إذا قطع مستوي سطح الكرة فإنّ الفصل المشترك لهما هو دائرة، وإذا مرّ هذا المستوي من مركز الكرة فالدائرة المتشكلة نسميها دائرة عظمى(Great Circle)، أما إذا لم يمّر المستوي القاطع من المركز فالدائرة المتشكلة هي دائرة صغرى



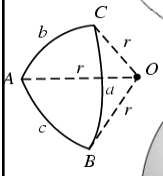
نسمي الجزء من قوس الدائرة العظمى المحدود بالنقطتين PP' المسافة الكروية بين النقطتين، وهي أقصر مسافة على السطح الكروي تصل بين النقطتين

المثلث الكروي

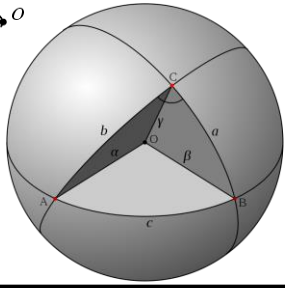
المثلث الكروي هو جزء من سطح الكرة محدّدة بأقواس ثلاثة دوائر عظمى، نقاط تقاطع هذه الدوائر هي رؤوس المثلث الكروي وعناصره هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث



زاوية المثلث الكروي هي الزاوية بين المماسين للدائرتين العظمتين المارتين من رأس المثلث، أو هي الزاوية الكائنة بين مستويي الدائرتين العظمتين المارتين من هذا الرأس

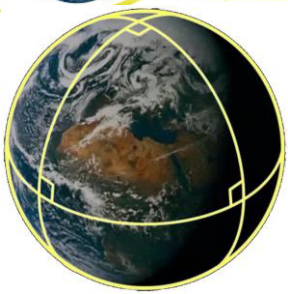


ضلع المثلث الكروي هو قوس الدائرة العظمى المحدد برأسين من رؤوس المثلث ،الشكل (1-15). ويقاس هذا الضلع بالزوايا المركزية المتشكلة بين نصفي القطرين المارين من هذين الرأسين.

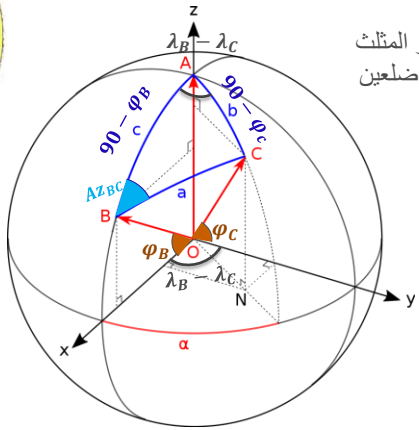


نرمز لزوايا المثلث الكروي بأحرف كبيرة A , B , C وبنفس الوقت هي تمثل رؤوس المثلث ، في حين نرمز لأضلاع المثلث بأحرف صغيرة a,b,c

حالات خاصة في المثلث الكروي

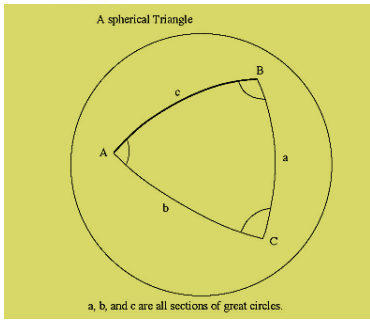


المثلث الكروي قائم الضلع هو مثلث كروي فيه على الأقل ضلع واحد قياسها 90°



المثلث الكروي القطبي هو المثلث المتعلق بنقطة القطب وله ضلعين أجزاء من خط طول

العلاقات الأساسية في المثلث الكروي:



المجموعة الأولى هي علاقات التجيب:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b \sin c.\cos A$$

وبالتبادل الدوري بين عناصر المثلث بالترتيب

$$\cos b = \cos c.\cos a + \sin c.\sin a.\cos B$$

وبالطريقة نفسها:

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos C$$

المجموعة الثانية هي علاقة الجيب:

$$\sin a.\sin B = \sin b.\sin A$$

إذا أجرينا عمليَّة التبادل الدوري بالترتيب لعناصر المثلث فأنّنا نحصل على ثلاث علاقات يمكن جمعها بعلاقة واحدة شبيهة بعلاقة الجيوب في المثلث المستوي هي:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

$$\left(\frac{\sin(A)}{\sin(a)}\right) = \left(\frac{\sin(B)}{\sin(b)}\right) = \left(\frac{\sin(C)}{\sin(c)}\right)$$

مثال محلول

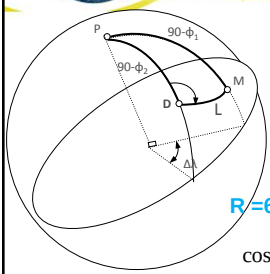
احسب المسافة بين مدينة دمشق D و مدينة مكة M إذا كانت

الاحداثيات الجغرافية لكل منهما:

$$D(\Phi_1, \lambda_1) = (33^0, 37^0)$$

$$M(\Phi_2, \lambda_2) = (22^0, 40^0)$$

واحسب السمت (الاتجاه) إلى مكة



R=6371 km

الحل:

$$\cos(L) = \cos(90^0 - \phi_1)\times\cos(90^0 - \phi_2) + \sin(90^0 - \phi_1)\times\sin(90^0 - \phi_2)\times\cos(\Delta\lambda)$$

$$\cos(L) = \sin(\phi_1)\times\sin(\phi_2) + \cos(\phi_1)\times\cos(\phi_2)\times\cos(\Delta\lambda)$$

$$\cos(L) = \sin(33^0)\times\sin(22^0) + \cos(33^0)\times\cos(22^0)\times\cos(40^0 - 37^0)$$

$$L = 11^0.315531 = 0.19749327 \text{ rad.}$$

السمت:

$$L = L \times R$$

$$L = 0.19749327 \times 6371 \text{ km} = 1258.229 \text{ km}$$

$$\frac{\sin(Z)}{\sin(90^0 - \phi_2)} = \frac{\sin(\Delta\lambda)}{\sin(L)}$$

$$Z = 165^0.6816$$

أمثلة محلولة : علاقة الجيوب

$B = 65° 33`$ , $b = 64` 23` 15"$ , $a = 99° 40` 48"$

Find A أوجد

الحل

$$\because \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\sin a \,.\, \sin B}{\sin b} = 0.9951467$$

$$\therefore \quad A = 84^\circ\ 21'\ 10''$$

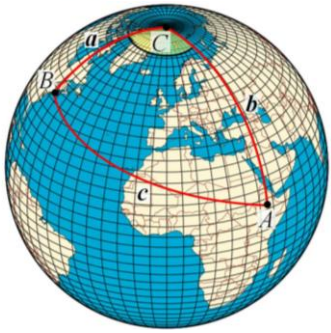
.15

أمثلة غير محلولة

$a = 99° 40' 48"$, $b = 64° 23' 15"$, $A = 95° 38' 42"$, Find B أوجد

$a = 100° 50`$ , $b = 99° 40` 48"$, $A = 97° 26` 29"$, Find B أوجد

مثال محلول



احسب المسافة على دائرة عظمى من بوسطون B إلى أديس ابابا A
إذا علمت أن نصف قطر الكرة الارضية هو 6387 km وأن :

زاوية عرض بوسطون 42◦19′N زاوية طول بوسطون 71◦05′W
زاوية عرض أديس ابابا 9◦03′N زاوية طول أديس ابابا 38◦42′E

الحل

a= 90◦ − 42◦19′ =
b= = 80◦57’
C = 71◦05′W + 38◦42′E =

cos c= cos(a◦) cos(b◦) + sin(a◦) sin(b◦) cos(C◦) =

$c = \cos^{-1}(\quad) =$

الزيادة الكروية

الزيّادة الكروية هي الفرق بين مجموع زوايا المثلث الكروي ومجموع زوايا المثلث المستوي ونرمز لها بـ ε أي:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^{o}$$

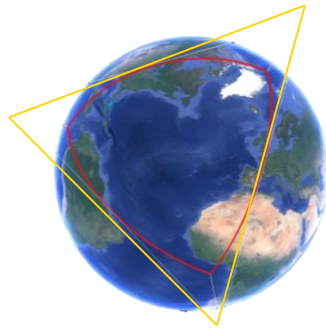
$$180 < A + B + C < 270$$

العلاقة بين مساحة المثلث الكروي P والزيادة الكروية ε :

$$\varepsilon = \frac{P}{R^2} \rightarrow P = \varepsilon \cdot R^2$$

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho''$$

$$\rho'' = \frac{180^{o}}{\pi} \times 60 \times 60 = 1/\sin 1''$$



امثلة محلولة

احسب الزيادة الكرويّة لزوايا مثلث مساحته تساوي 1/240 من مساحة الأرض الكروية

الحل :

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2 \times \sin 1''}$$

$$P = \frac{1}{240} \times \left(4\pi R^2\right)$$

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi R^2}{R^2 \times \sin 1'' \times 240} = \frac{4\pi}{240 \times \sin 1''}$$

$$\varepsilon'' = 10800'' = 3^{\circ}$$

مجموع الزوايا الداخلية للمثلث $180^{\circ} + 3^{\circ} = 183$

مثال محلول :

احسب الزيادة الكروية للمثلث ABC على سطح المجسم الكروي لـ WGS-84 وفق الآتي:

R=6370.00 km

AB = 30675.40 m , AC = 45887.70 , A = 27˚ 52' 25"

الحل:

$$\varepsilon''=\frac{P}{R^2\times \sin 1''}$$

P = 1/2 ×30675.40×45887.70×sin (27˚ 52' 25")

P = =329048000.30m^2

$$\varepsilon''=\frac{329048000}{6370000\times \sin 1''}=1.67''.$$

مثال محلول

لدينا المثلث الكروي :

A = 40˚ , c = 55˚ , b = 60˚

المطلوب حساب مساحة المثلث الكروي إذا كان نصف قطر الكرة يساوي متراً واحداً.

الحل :

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A$$

$$=\cos 60.\cos 55 + \sin 60.\sin 55.\cos 40 = 0.830225$$

$$a = 33^{\circ}.87813$$

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B$$

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos a.\cos c}{\sin a.\sin c}=\frac{0.5-(0.830225\times\cos 55)}{\sin 33.87813\times\sin 55}$$

$$B = 87^{\circ}.99452$$

$$\frac{\sin C}{\sin 55}=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin 40}{\sin 33.87813}$$

$$C = 70^{\circ}.83713$$

مساحة المثلث الكروي :

$$= (A+B+C-\pi)\times R^2$$

$$= \left[(40+87.99452+70.8371)-\pi\times\frac{\pi}{180}\right]\times 1$$

$$= 0.3286\ m^2$$