جامعة دمشق

كلية السياحة

محاضرات مقرر بحوث العمليات

لطلاب السنة الثانية سياحة

إعداد: د. غزوة الصرن

العام الدراسي: 2018–2019

مفهوم بحوث العمليات: نورد التعاريف التالية لهذا المفهوم:

- فن وعلم في آن واحد، حيث يتمثل الفن في القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة في نموذج رياضي محدد تحديداً علمياً بالنسبة لموقف أو نظام معين، أما العلم فيتمثل في اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج. والنظام المدروس قد يكون موجود فعلاً، ويهدف في هذه الحالة بناء أو حل النموذج إلى تحديد سلوك أمثل للنظام لتحسين أدائه، أو قد يكون مجرد فكرة تنتظر التنفيذ وتتجه غاية النموذج في هذا الوضع نحو تمييز البنية الأفضل للنظام في المستقبل.
- عملية صنع القرار المبنية على المنهج العلمي مع الاعتماد بصفة رئيسية على أساليب التحليل الكمي في حل المشكلة الادارية بهدف الوصول إلى البديل الأمثل في حدود الامكانيات المتاحة، وذلك بناء على بيانات تفصيلية ودراسة دقيقة للمخرجات وتقدير المخاطر لكل من البدائل المتاحة.
- علم التمثيل الرياضي لعملية اتخاذ القرار، وإيجاد طرق حل لهذه النماذج الرياضية.

نماذج بحوث العمليات: يوجد ثلاثة أنواع هي: النماذج الرياضية، نماذج البحث والاستقصاء، نماذج المحاكاة.

مفهوم الأمثلية: أمثلية نموذج تعني حله الأفضل فأمثلية نظام تعني وضعه الأفضل فقط بالنسبة للمشكلة أو الهدف المدروس في النظام. والأمثلة تتحقق عادة إما بتصغير أو تعظيم قيمة رائز النظام المدروس.

مراحل دراسة بحوث العمليات: يمر أي فريق عمل لإعداد دراسات بحوث العمليات بالمراحل الأساسية التالية:

أولاً: تعريف المشكلة: تتطلب هذه المرحلة تعريف المسألة، ويتضمن التعريف ثلاثة عناصر أساسية هي: وصف دقيق لهدف الدراسة، تشخيص بدائل القرار للنظام، تمييز حدود وقيود ومتطلبات النظام. والخطأ الشائع الذي يقع به الباحث هو تحديد هدف يمثل جزءاً من النظام، وهذا قد يضر النظام. فأي دراسة لا تحسب جيداً جميع مشاكل بدائل القرار وحدود النظام تقود لإعطاء حل غير دقيق.

ثانياً: صياغة النموذج: يتم الانطلاق من تعريف المشكلة إلى تقرير النموذج الأكثر ملائمة لتمثيل النظام. يتم في هذه المرحلة تحديد التعابير الكمية لهدف وقيود المسألة بدلالة متغيرات القرار. وإذا كانت النماذج من النماذج الرياضية الشائعة (نماذج البرمجة الخطية) تستخدم التقنيات الرياضية لحلها، أما إذا كان النموذج معقداً لا يمكن الحصول على حلول تحليلية تستخدم نماذج المحاكاة في هذه الحالة، أو قد يضطر الباحث إلى استخدام توليفة من النماذج الرياضية، وذلك حسب درجة تعقيد النظام.

ثالثاً: حل النموذج: فيتم حل النماذج الرياضية باستخدام تقنيات الأمثلة المشهورة، ويكون حل النموذج أمثلاً. أما في حال استخدام نماذج المحاكاة

ونماذج البحث والاستقصاء فإن مفهوم الأمثلة لا يمكن تحديده بدقة. ويتم البحث عن معلومات إضافية. إضافة إلى حل النموذج، وذلك حول السلوك المتوقع لهذا الحل إذا طرأت أي تغييرات على معالم النظام. وهذا ما يسمى تحليل الحساسية.

رابعاً: فحص فعالية النموذج (صحة النموذج): يكون النموذج صحيحاً إذا أعطى تنبؤاً موثوقاً لأداء النظام والطريقة الشائعة لاختبار صحة النموذج هي مقارنة أداء النظام الحالي مع أداء النظام في الماضي بفرض ثبات جميع المدخلات للنظام، وإذا كان أداء النظام حالياً هو نفس أدائه في الماضي يكون صحيحاً.

خامساً: تطبيق النتائج الكلية المنجزة للنموذج: وتنفذ مرحلة التطبيق من خلال التعاون بين فريق بحوث العمليات مع فريق إدارة وعمل النظام، حيث يضع فريق البحوث خطة التطبيق العملي، وهي ترجمة نتائج النموذج إلى سلسلة من التعليمات العملية المتصلة. أما فريق إدارة وتشغيل النظام فيقوم بتنفيذ هذه الخطة.

نماذج البرمجة الخطية

تعريف البرمجة الخطية: هي إحدى نماذج البرمجة الرياضية التي تهتم بالتوزيع أو التخصيص الفعال لموارد محدودة على أنشطة معروفة بقصد الوصول إلى هدف مرغوب. وتبنى المسائل أو النماذج الخطية من علاقات رياضية تكون جميعها خطية وهي تتضمن عادة:

1- هدف نسعى إلى تحقيقه مثل ربح أعظمي او تكلفة دنيا.

2- متغيرات قرار يجب تحديدها للوصول إلى الهدف المطلوب والمرغوب.

3-قيود فنية تفرض على متغيرات القرار.

<u>رياضياً</u>: البرمجة الخطية تبحث عن الحل الأمثل للتابع الخطي الذي تدخل في تركيبته عدة متغيرات x_j حيث j=1,2,.....n وتقيد هذه المتغيرات مجموعة مساويات (معادلات) أو متباينات(متراجحات) تسمى قيود أو شروط المسألة.

أمثلية تابع هدف $\text{optimize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$

ضمن القيود: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n (\leq, =, \geq) d_i$

i=1,2,.....m

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث j=1,2,....n

حيث c_j ،d_i ،a_{ij} هي معطيات أو معالم تفرضها طبيعة المسالة المدروسة.

يسمى التابع Z بتابع الهدف (دالة الهدف) لأنه يحدد أمثلية المسألة المدروسة(تصغيرMin، تعظيم Max). أما القيود فهي قيود فنية تفرض على متغيرات القرار وكل منها يكون له إشارة واحدة من الإشارات = أو $\geq$ أو $\leq$. أما قيود عدم السلبية فتفرض على متغيرات القرار وتعتبر غالباً ضرورية لتطوير أساليب الحل للمسألة.

يشير d_i إلى الكمية المتاحة من الموردi. ويقيس a_{ij} الكمية من المورد i التي تخصص لكل وحدة واحدة من النشاطj. ويمثلc_j سعر(البيع أو الربح أو التكلفة) للوحدة الواحدة التي ينتجها النشاط j.

بعض تطبيقات البرمجة الخطية:

1. **مسألة تركيب وجبة غذائية:** وجد أن كل فرد يحصل على 70 وحدة من البروتين، 100وحدة من الكربوهيدرات، 20 وحدة من الدهون يومياً. فإذا توفر لدينا الأنواع التالية من الغذاء فما هو الخليط الذي يحقق أقل كلفة.

الغذاء	بروتين وحدة/كغ	كربوهيدرات وحدة /كغ	دهون وحدة/كغ	تكلفة ل.س/كغ
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	9

يأخذ نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة الصيغة التالية:

متغيرات القرار $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 9x_6$$

ضمن القيود التالية:

$$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 \geq 70$$
$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 \geq 100$$
$$4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 \geq 20$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

مسألة إنتاج شركة صناعية:

تصنع إحدى الشركات الصناعية أربعة منتجات معدنية يحتاج كل منها إلى تشغيل وتلميع وتجميع كما يحتاج إلى الأزمنة التالية:

المنتجات	تشغيل بالساعة	تلميع بالساعة	تجميع بالساعة
منتج1	3	1	2
منتج2	2	1	1
منتج3	2	2	2
منتج4	4	3	1

ويقدر الوقت المتاح اسبوعياً كالآتي:

480 ساعة للتشغيل، 400 ساعة للتلميع، 400 ساعة للتجميع، وأرباح الشركة من الوحدة الواحدة هي: 8,6,4,6 دولار على التوالي. وقد وقعت الشركة عقداً مع أحد الموزعين لإمداده بالأعداد 50 وحدة من المنتج /1/، 100 وحدة من أي مجموعة من المنتجات، 2 و3 كل أسبوع. ومع عميل آخر تستطيع الشركة بيعه أية كميات

منتجة من المنتجات(1 و2 و3)، ولكن بحد أقصى 25 وحدة فقط من المنتج4، كم عدد الوحدات من كل منتج يجب أن تنتجها الشركة كل اسبوع لمواجهة الالتزامات التعاقدية. ولتعظيم الربح الكلي مع افتراض أن أي منتجات غير كاملة سيتم استكمالها في الاسبوع المقبل.

نموذج البرمجة الخطية لتلك المسألة:

$$Max\ Z = 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 480$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 400$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 400$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_4 \leq 25$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

صيغ وتحويلات النماذج الخطية:

1- **الصيغة النظامية(القانونية):** تأخذ مسألة البرمجة الخطية صيغة نظامية إذا تحقق: $Max(Min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

ضمن الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \leq \left(\geq \text{أو}\right) d_i$$

i=1,2,.....m

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث j=1,2,....n

أي أن:

- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة.
- جميع متباينات(متراجحات) القيود هي من إشارة واحدة $(\leq,\geq)$، و d_i غير محددة الاشارة.
- تابع الهدف من نوع التعظيم في حالة$(\leq)$.
- تابع الهدف من نوع التصغير في حالة$(\geq)$.

2- **الصيغة القياسية(النموذجية):** تأخذ مسألة البرمجة الخطية صيغة قياسية نموذجية إذا تحقق:

$$Max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ضمن القيود التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i$$

i=1,2,.....m

قيود عدم السلبية: $x_j \geq 0$ حيث j=1,2,....n

أي أن:

- جميع متغيرات القرار تكون غير سالبة.
- جميع القيود هي معادلات(مساويات) ويستثنى من ذلك قيود عدم السلبية.
- الطرف الأيمن لكل قيد d_i يكون غير سالب.
- تابع الهدف يكون تعظيم أو تصغير.

3- **الصيغة المختلطة:** يقال عن مسألة برمجة خطية بأنها ذات صيغة مختلطة إذا لم تأخذ هذه المسألة صيغة نظامية، وصيغة قياسية نموذجية، ويمكن الانتقال من الصيغة المختلطة إلى الصيغة النظامية أو الصيغة القياسية باستخدام بعض التحويلات الأولية التالية:

تحويلة(1): تصغير تابع الهدف Z يكافئ رياضياً تعظيم الصيغة السالبة لهذا التابع: W=-Z ومنه Min=Max W.

تحويلة(2): إن أية متباينة من إشارة معينة يمكن أن تستبدل بمتباينة من إشارة معاكسة بضرب طرفيها بـــ(-1).

$\mathrm{ax} \geq \mathrm{d}$ تكافئ $-\mathrm{ax} \leq -\mathrm{d}$

تحويلة(3): كل مساواة يمكن أن تستبدل بمتباينتين متعاكستين.

$\mathrm{ax} = \mathrm{d}$ تكافئ:

$$ax \leq d$$
$$ax \geq d$$

تحويلة (4): كل متغير غير محدد الاشارة (قيمته موجبة أو سالبة أو صفرية) يمكن أن يستبدل بتفاضل متغيرين غير سالبين إذا كان x غير محدد الاشارة و $x^+, x^- \geq 0$ فإن x يستبدل بـــ $(x^+ - x^-)$.

تحويلة(5): كل متباينة طرفها الأيسر يشكل قيمة مطلقة يمكن أن يستبدل بمتباينتين نظاميتين إذا كان $p, q \geq 0$ فإن:

$|ax| \leq p$، تستبدل بـــ $\left.\begin{matrix} ax \leq p \\ ax \geq -p \end{matrix}\right]$

$|ax| \geq q$، تستبدل بـــ $\left.\begin{matrix} ax \geq q \\ ax \leq -q \end{matrix}\right]$

تحويلة(6): كل متباينة يمكن أن تحول إلى مساواة بالإضافة إلى (أو بالطرح من) طرفها الأيسر متغير جديد غير سالب يسمى متغير فروق أو متغير مساعد. ويجب أن تنسجم عملية الإضافة أو الطرح مع إشارة المتباينة.

مثال: لتكن معطاة مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geq 50$$

$$5x_1 + 3x_2 = 20$$

$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$. مع العلم بأن x_3 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية للمسألة.

يمكن الحل بطريقتين:

الطريقة الأولى: المحافظة على تابع الهدف من النوع max وتحويل القيود كلها لتكون إشارتها من ≤، وجعل جميع متغيرات القرار غير سالبة كما يلي:

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-)$$

القيد الأول: $x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) \leq 40$

القيد الثاني نضرب الطرفين بـــ-1 يصبح:

$$-x_1 - 9x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) \leq -50$$

القيد الثالث: معادلة تحول إلى متراجحتين حيث يتم تحويل المتراجحة التي إشارتها ≥ إلى متراجحة إشارتها ≤ وذلك بضرب طرفيها بـــ-1 فنحصل على:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 20$$

$$-5x_1 - 3x_2 \leq -20$$

القيد الرابع: يحول إلى متراجحتين كما يلي:

$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \leq 100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

الطريقة الثانية: تحويل تابع الهدف إلى نوع الــmin والقيود تكون إشارتها $\geq$ وجميع متغيرات القرار غير سالبة. يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

$$\text{Min} = \max w = \max(-z) = -3x_1 + 3x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-)$$

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

القيد الأول نضرب بـــ-1 يصبح كالآتي:

$$-x_1 - x_2 - 3(x_3^+ - x_3^-) \geq -40$$

القيد الثاني:

$$x_1 + 9x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) \geq 50$$

القيد الثالث: معادلة تحول إلى متراجحتين حيث يتم تحويل المتراجحة التي إشارتها $\leq$ إلى متراجحة إشارتها $\geq$ وذلك بضرب طرفيها بـــ-1 فنحصل على:

$$-5x_1 - 3x_2 \geq -20$$
$$5x_1 + 3x_2 \geq 20$$

القيد الرابع: يحول إلى متراجحتين كما يلي:

$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$$
$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) \geq -100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$

مثال(2): حول النموذج في المثال السابق إلى الصيغة القياسية النموذجية:

المتغير x_3 غير محدد الاشارة يستبدل بتفاضل المتغيرين $(x_3^+ - x_3^-)$ وذلك في تابع الهدف وفي القيود أينما ورد.

$$\text{Max } Z = 3x_1 - 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) + 0s_1 - 0s_2 + 0s_4 + 0s_5$$

القيود: ضمن الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) + s_1 = 40$$
$$x_1 + 9x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) - s_2 = 50$$
$$5x_1 + 3x_2 = 20$$
$$5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) + s_4 = 100$$
$$-5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) + s_5 = 100$$

قيود عدم السلبية: $x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, s_1, s_2, s_4, s_5 \geq 0$

الحل البياني لمسألة البرمجة الخطية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تتضمن المسألة متغيرين اثنين فقط، ومع ذلك تعتبر هذه الطريقة مفيدة لأنها توضح المفاهيم الأساسية اللازمة لتطوير خوارزميات حل المسألة.

مثال(1): المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$ ضمن القيود

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$2x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: تحديد فراغ الحل الممكن والحل الأمثل للمسألة.

الحل:

ملاحظة: بعد رسم القيد على محوري الاحداثيات يجب أن نحدد منطقة الحلول الممكنة لهذا القيد ولدينا ثلاث حالات:

1 إذا كان القيد متراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) تكون متجهة نحو الداخل نحو مبدأ الاحداثيات.

2 إذا كان القيد متراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) تكون متجهة نحو الخارج مبتعدة عن مبدأ الاحداثيات.

3 إذا كان القيد من نوع يساوي(معادلة) فإن منطقة الحلول الممكنة (التي تحقق المعادلة) هي النقاط الواقعة على الخط المستقيم فقط والموجودة في الربع الأول.

لحل المسألة نرسم المستقيمات الممثلة للقيود ونحدد منطقة حلول كل منها كما يلي:

القيد الأول: $x_1 = 0 \Longrightarrow 3x_2 = 6 \Longrightarrow x_2 = \frac{6}{3} = 2$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة (0,2). أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي: $x_2 = 0 \Longrightarrow 2x_1 = 6 \Longrightarrow x_1 = \frac{6}{2} = 3$ أي في النقطة (3,0). ونرسم المستقيم (1).

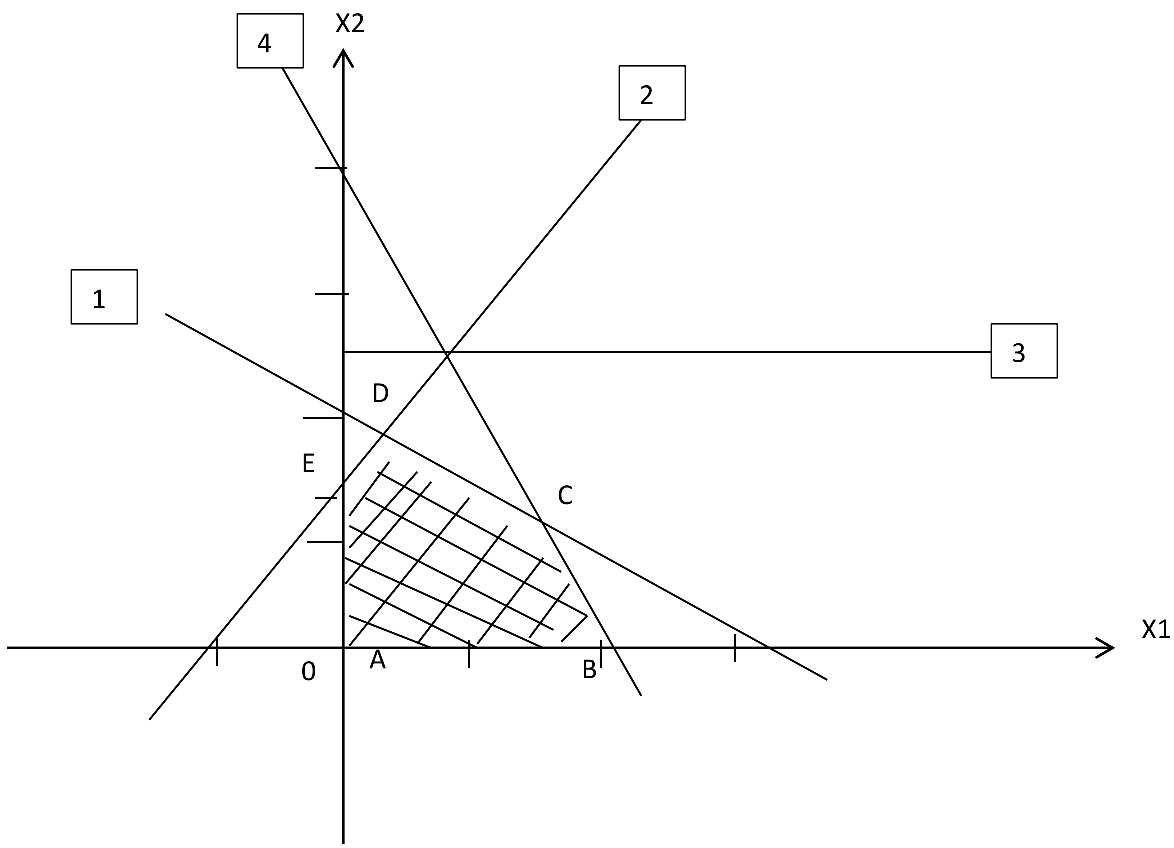
القيد الثاني: $x_1 = 0 \Longrightarrow 2x_2 = 3 \Longrightarrow x_2 = \frac{3}{2}$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة (0,3/2). أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي:

$$x_2 = 0 \Longrightarrow -3x_1 = 3 \Longrightarrow x_1 = \frac{-3}{3} = -1$$

أي في النقطة (-1,0). ونرسم المستقيم (2).

القيد الثالث: $2x_2 = 5 \Longrightarrow x_2 = \frac{5}{2} = 2.5$ ونرسم المستقيم (3).

القيد الرابع: $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 4$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي في النقطة (0,4). أما نقطة تقاطعه مع المحور الأفقي فهي: $x_2 = 0 \Longrightarrow$ $2x_1 = 4 \Longrightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$ أي في النقطة (2,0). ونرسم المستقيم (4).



بعد رسم المستقيمات وتعيين منطقة الحلول المشتركة يتحدد مضلع الحل ABCDE نقوم بتحديد إحداثيات كل نقطة من نقاطه بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمن المتقاطعين في تلك النقطة كما يلي:

النقاط	X1	X2	Z
A	0	0	0
B	2	0	8
C	1.5	1	9
D	3/13	24/13	84/13=6.5
E	0	1.5	4.5

مثلاً إحداثيات النقطة C تنتج عن الحل المشترك لمعادلتي المستقيمين 4 و1 كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 = 4 \quad (2)$$

بطرح المعادلة (2) من (1) ينتج لدينا $2x_2 = 2$ ومنه $x_2 = 1$ نعوض في (2) فنجد أن $2x_1 + 1 = 4$ ومنه $2x_1 = 3$ أي $x_1 = \frac{3}{2} = 1.5$

بالحل المشترك لمعادلتي المستقيمين 2 و1 تنتج إحداثيات النقطة D وهي (3/13,24/13)

نجد من الجدول أن القيمة العظمى لــZ هي 9 أي الحل الأمثل هو في النقطة C التي إحداثياتها $X_1=1.5, X_2=1$.

مثال(2): المطلوب إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية التالية:

$Min\ Z = x_1 + x_2$ ضمن القيود

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$
$$5x_1 + 8x_2 \geq 40$$
$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: تحديد فراغ الحل الممكن والحل الأمثل للمسألة.

رسم المستقيمات:

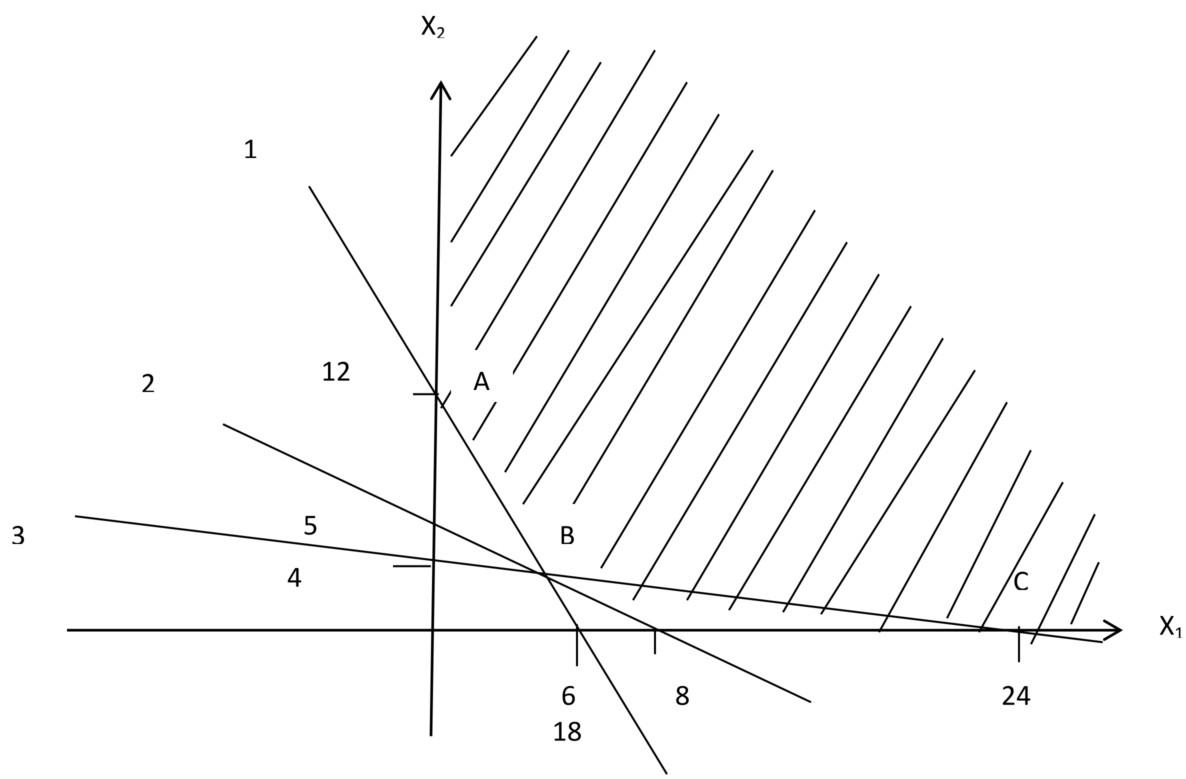
1- $2x_1 + x_2 = 12$ نجعل $x_1=0$ فنجد $x_2=12$ يتقاطع المستقيم مع المحور العمودي بالنقطة (0,12)، وعندما $x_2=0$ نجد أن $x_1=12/2=6$ أي يتقاطع المستقيم مع المحور الافقي في النقطة (6,0)

2- $5x_1 + 8x_2 = 40$ وبنفس الطريقة نجد أن نقطتي التقاطع مع المحاور هما $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{40}{8} = 5$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور العمودي (0,5).

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{40}{5} = 8$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي (8,0).

3- $x_1 + 6x_2 = 24$ وبنفس الطريقة نجد أن نقطتي التقاطع مع المحاور هما $x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{24}{6} = 4$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور العمودي (0,4).

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{24}{1} = 24$ وتكون نقطة التقاطع مع المحور الأفقي (24,0).



—

النقاط	X1	X2	Z
A	0	12	12
B	4.3	3.4	7.7
C	24	0	24

لتحديد إحداثيات النقطة B نحل معادلتي المستقيمين 1 و 3 حلاً مشتركاً فينتج لدينا:

$$2x_1 + x_2 = 12 \quad (1)$$

$$x_1 + 6x_2 = 24 \quad (3)$$

من (1) لدينا $X_2=12-2X_1$ نعوض في (3) فنجد:

$$x_1 + 6(12 - 2x_1) = 24$$
$$x_1 + 72 - 12x_1 = 24$$
$$-11x_1 = 24 - 72 = -48$$

ومنه

$$x_1 = -\frac{48}{-11} = 4.3$$

ومنه

$$x_2 = 12 - 2(4.3) = 3.4$$

يتضح من الجدول بأن أدنى قيمة لتابع الهدف هي 7.7 فاإحداثيات النقطة B هي التي تحقق أدنى قيمة له أي $x_1 = 4.3$ و $x_2 = 3.4$

طريقة السمبلكس الشاملة

مثال(1):

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$Min\ Z = 4x_1 + x_2$ ضمن القيود

$$\begin{gathered} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

طريقة الحل:

1- نجعل تابع الهدف على شكل معادلة =0

$$Min\ Z = 4x_1 + x_2 \rightarrow\ Z - 4x_1 - x_2 = 0$$

2- نحول القيود ونجعلها من نوع واحد وهو أصغر أو يساوي دائماً وهنا نصادف الآتي:

أ- القيد من نوع أصغر أو يساوي: ليس بحاجة إلى تحويل

ب- القيد من نوع أكبر أو يساوي: نضرب طرفي المتراجحة بـــ(-1) ونعكس الاشارة للمتراجحة.

ت- القيد من نوع يساوي (معادلة): يكتب على شكل قيدين أو يشتق منه قيدين مرة أكبر أو يساوي ومرة أصغر أو يساوي.

أي تصبح القيود على الشكل التالي:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 = 3$ ويصبح قيدين الأول $3x_1 + x_2 \leq 3$

والثاني $3x_1 + x_2 \geq 3$ حيث يتم تحويل القيد الثاني ليصبح من النوع أصغر ويساوي بضرب الطرفين بــ(1−). فيصبح:

$$-3x_1 - x_2 \leq -3$$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 \geq 6$ نضربه بــ (1−) فيصبح: $-4x_1 - 3x_2 \leq -6$

القيد الثالث: يبقى كما هو:

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

وبالتالي يكون النموذج بشكله النهائي:

$$Z - 4x_1 - x_2 = 0$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3 \qquad y_1$$

$$-3x_1 - x_2 \leq -3 \qquad y_2$$

$$-4x_1 - 3x_2 \leq -6 \qquad y_3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \qquad y_4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نرسم جدول السمبلكس عدد أسطره هو بعدد القيود في النموذج وهناك سطر خاص لتابع الهدف z أما الاعمدة تساوي عدد المتغيرات x وهناك عمود خاص يسمى عمود الحل.

الجدول (1)

المتغير / القيد	x_1 **عمود محوري**	x_2	قيم الحل
Y_1	-3	-1	-3
Y_2	3	1	3
Y_3 **سطر محوري**	**4- عنصر محوري**	-3	-6
Y_4	1	2	4
z	-4	-1	0

يتم الحل على مرحلتين بغض النظر عن تابع الهدف:

1- اختبار مسموحية الحل: الامر يتعلق بالارقام الموجودة في عمود الحل. حتى يكون الحل مسموحاً يجب أن تكون جميع قيم عمود الحل كلها قيماً موجبة أو أصفاراً وفي الجدول(1) يوجد قيم سالبة يجب تطوير مسموحية الحل.

- ننظر إلى عمود الحل ونختار القيمة الأشد سلبية وهي(−6) ونسمي سطرها سطر محوري والمتغير التابع لها سيخرج من الحل. وفي حال وجود قيمتين سالبتين متساويتين نختار إحداهما.
- ولاختيار وتحديد العمود المحوري نختار القيمة الأشد سلبية في السطر المحوري ليكون عمودها هو العمود المحوري وهذه القيمة هي العنصر المحوري وفي مثالنا هي (−4).

- لا يمكن أن يكون عمود الحل هو عمود محوري. ولا يمكن أن يكون سطر z هو سطر محوري.
- يوجد أربع قواعد لملء جدول جديد هي:

أ- نضع مكان العنصر المحوري مقلوبه.

ب- نضع مكان قيم السطر المحوري قيمها الجديدة والتي تساوي القيمة القديمة مقسومة على العنصر المحوري السابق(-4) في الجدول (1) مهما كانت قيمته ودوماً تؤخذ من الجدول السابق للجدول الجديد.

ت- نضع مكان قيم العمود المحوري قيمها الجديدة الناتجة عن تقسيم القيمة القديمة على العنصر المحوري والضرب بـــ (-1).

ث- أما باقي خلايا الجدول فتنتج من خلال العلاقة التالية:

القيمة الجديدة= القيمة القديمة-[(القيمة المقابلة في السطر المحوري × القيمة المقابلة في العمود المحوري)÷ العنصر المحوري].

ج- بعد الانتهاء من ملء أي جدول جديد أول ما ننظر إلى عمود الحل للاختبار والتأكد من مسموحية الحل.

بتطبيق هذه القواعد نحصل على الجدول الجديد (2) التالي:

الجدول (2):

المتغير / القيد	y_3	x_2 عمود محوري	قيم الحل
Y_1	(-3/-4)(-1)= -3/4	$-1-\frac{-3\times-3}{-4}=\frac{5}{4}$	$-3-\frac{-3\times-6}{-4}=\frac{6}{4}$
Y_2 سطر محوري	(¾-)(-1)=3/4	$1-\frac{3\times-3}{-4}=-\frac{5}{4}$ عنصر محوري	$3-\frac{3\times-6}{-4}=-\frac{6}{4}$
x_1	**-1/4**	-3/-4=3/4	-6/-4=6/4
Y_4	(-1/4)(-1)=1/4	$2-\frac{-3\times1}{-4}=\frac{5}{4}$	$4-\frac{1\times-6}{-4}=\frac{10}{4}$
z	(-4/-4)(-1)= -1	$-1-\frac{-3\times-4}{-4}=2$	$0-\frac{-4\times-6}{-4}=6$

نجري اختبار المسموحية والذي يتعلق بعمود الحل حيث يوجد قيماً سالبة فيجب تطوير مسموحية الحل فنختار القيمة الأشد سلبية وهي (6/4-) فيكون سطرها هو سطر محوري، والقيمة الأشد سلبية في السطر المحوري باستثناء عمود الحل الذي لا يمكن أن يكون عمود محوري هي 5/4- فتكون هي العنصر المحوري

وعمودها هو عمود محوري. ونبدأ بملء جدول جديد(الجدول3) بتطبيق القواعد السابقة كما يلي:

الجدول(3):

المتغير / القيد	y_3	y_2	قيم الحل
Y_1	$\frac{-3}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=0$	$\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}\times -1=\frac{5}{4}\times\frac{+4}{5}=1$	$\frac{6}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=0$
x_2	$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{3}{4}\times\frac{-4}{5}=-\frac{3}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{-6}{4}\times\frac{-4}{5}=\frac{6}{5}$
x_1	$\frac{-1}{4}-\frac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{1}{5}$	$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}\times -1=\frac{3}{4}\times\frac{+4}{5}=\frac{3}{5}$	$\frac{6}{4}-\frac{\frac{3}{4}\times\frac{-6}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{3}{5}$
Y_4 سطر محوري	$\frac{1}{4}-\frac{\frac{5}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=1$	عنصر $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}\times -1=\frac{5}{4}\times\frac{+4}{5}=1$ محوري	$\frac{10}{4}-\frac{\frac{-6}{4}\times\frac{5}{4}}{\frac{-5}{4}}=1$
z	$-1-\frac{2\times\frac{3}{4}}{\frac{-5}{4}}=\frac{1}{5}$	**عمود** $\frac{2}{\frac{-5}{4}}\times -1=2\times\frac{+4}{5}=\frac{8}{5}$ **محوري**	$6-\frac{\frac{-6}{4}\times 2}{\frac{-5}{4}}=\frac{18}{5}$

بالنظر إلى الجدول(3) نجد أن جميع قيم عمود الحل موجبة وبالتالي ننتقل إلى الاختبار الثاني وهو:

اختبار مثالية الحل:

- في حال كان تابع الهدف من نوع max حتى يكون الحل مثالياً يجب أن تكون قيم سطرz كلها أصفار أو موجبة، وفي حال وجود قيم سالبة في سطر

z نقوم باختيار القيمة الأشد سلبية ونسمي عمودها بالعمود المحوري، ولتحديد واختيار السطر المحوري نقوم بقسمة قيم عمود الحل على القيم المقابلة لها في العمود المحوري ونختار أصغر ناتج قسمة.

ملاحظة: نهمل القسمة على صفر أو قيم سالبة.

- في حال كان تابع الهدف من نوع min حتى يكون الحل مثالياً يجب أن تكون قيم سطرz كلها قيم سالبة، وفي حال وجود قيم موجبة في سطر z نقوم باختيار القيمة الأشد ايجابية ونسمي عمودها بالعمود المحوري، ولتحديد واختيار السطر المحوري نقوم بقسمة قيم عمود الحل على القيم المقابلة لها في العمود المحوري ونختار أصغر ناتج قسمة.
- نختار القيمة الاشد سلبية في سطر z في حال max بينما نختار القيمة الاكثر ايجابية في حال min.
- ننظر إلى الجدول (3) نجد أن قيم سطر z موجبة وتابع الهدف من النوع min نختار القيمة الأكثر إيجابية وهي /1/

الجدول (4)

المتغير / القيد	y_3 عمود محوري	y_4	قيم الحل
Y_1 سطر محوري	$0-\frac{1\times1}{1}=-1$ عنصر محوري	-1	$0-\frac{1\times1}{1}=-1$
x_2	$-\frac{3}{5}-\frac{1\times\frac{-4}{5}}{1}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}-\frac{1\times\frac{-4}{5}}{1}=2$

x_1	$\frac{1}{5}-\frac{1\times\frac{3}{5}}{1}=\frac{-2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}-\frac{1\times\frac{3}{5}}{1}=0$
Y_2	1	1	1
z	$\frac{1}{5}-\frac{1\times\frac{8}{5}}{1}=\frac{-7}{5}$	$-\frac{8}{5}$	$\frac{18}{5}-\frac{1\times\frac{8}{5}}{1}=2$

نعود إلى عمود الحل لنختبر المسموحية فنجد لدينا قيمة سالبة فسطرها هو سطر محوري. وليكن العمود الأول هو عمود محوري.

الجدول(5):

المتغير / القيد	y_1	y_4	قيم الحل
y_3	-1	1	1
x_2	$\frac{1}{5}\times -1\times -1=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}-\frac{-1\times\frac{1}{5}}{-1}=\frac{3}{5}$	$2-\frac{-1\times\frac{1}{5}}{-1}=\frac{9}{5}$
x_1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-3}{5}-\frac{-1\times\frac{-2}{5}}{-1}=\frac{-1}{5}$	$0-\frac{-1\times\frac{-2}{5}}{-1}=\frac{2}{5}$
Y_2	1	$1-\frac{-1\times 1}{-1}=0$	$1-\frac{-1\times 1}{-1}=0$
z	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-8}{5}-\frac{-1\times\frac{-7}{5}}{-1}=\frac{-1}{5}$	$2-\frac{-1\times\frac{-7}{5}}{-1}=\frac{17}{5}$

بالنظر الى عمود الحل جميع قيمه موجبة او صفر. ونلاحظ من قيم سطر z أن جميعها سالبة وبالتالي الحل مثالي والتكلفة الاجمالية هي:

$z=\frac{17}{5}$, $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=\frac{9}{5}$ للتأكد نعوض في تابع الهدف:

$$\min z=4x_1+x_2=4(\frac{2}{5})+\frac{9}{5}=\frac{17}{5}$$

الحل مسموح ومثالي ونهائي والتكلفة الاجمالية الكلية المثلى والأدنى هي $\frac{17}{5}$

مثال (2): لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

ضمن القيود $Max\ Z = 5x_1 + 7x_2 + 5x_3$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$6x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 12$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل: $Z - 5x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 10 \qquad (y_1)$$
$$-6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq -12 \qquad (y_2)$$

المعادلة تحول الى القيدين:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 18 \Longrightarrow$$
$$-5x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -18 \qquad (y_3)$$
$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 18 \qquad (y_4)$$

جدول السمبلكس الأول:

المتغير / القيد	عمود x_1 محوري	x_2	x_3	قيم الحل
Y_1	2	3−	4	10
Y_2	6−	1−	2	12−
Y_3 سطر محوري	**عنصر محوري 5−**	3−	1−	18−
Y_4	5	3	1	18
z	5−	7−	5−	0

الجدول (2):

المتغير / القيد	y_3	عمود محوري x_2	x_3	قيم الحل
Y_1	2/5	-21/5	18/5	14/5
Y_2 سطر محوري	-6/5	**13/5** عنصر محوري	16/5	48/5
x_1	-1/5	3/5	1/5	18/5
Y_4	1	0	0	0
z	-1	-4	-4	18

الجدول (3):

المتغير / القيد	عمود y_3 محوري	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	-20/13	21/13	114/13	238/13
x_2	-6/13	5/13	16/13	48/13
x_1 سطر محوري	**1/13 عنصر محوري**	-3/13	-7/13	18/13
Y_4	1	0	0	0
z	-37/13	20/13	12/13	426/13

الجدول(4):

المتغير / القيد	عمود محوري x_1	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	20	−3	−2	46
x_2	6	−1	−2	12
y_3	13	−3	−7	18
Y_4 سطر محوري	عنصر محوري 13-	3	7	−18
z	37	−7	−19	84

الجدول (5):

المتغير / القيد	y_4	y_2	x_3	قيم الحل
Y_1	20/13	21/13	114/13	238/13
x_2	6/13	5/13	16/13	48/13
y_3	1	0	0	0
x_1	-1/13	-3/13	-7/13	18/13
z	37/13	20/13	12/13	426/13

الحل الأمثل:

Z=426/13

$$x_1 = 18/13$$

$$x_2 = 48/13$$

$$x_3 = 0$$

تطبيقات عملية

المسألة الأولى: أ- ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$\min Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geq 40$$
$$7x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$$
$$|2x_2 + 10x_3| \leq 90$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. مع العلم بأن x_2 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية للمسألة.

الحل:

يوجد طريقتين للحل: **الطريقة الأولى:** تابع الهدف من النوع Min فتكون القيود كلها(≥) أكبر أو يساوي وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$MinZ = 5X_1 - 2(X_2^+ - X_2^-) + 3X_3$$

القيد الأول يضرب بـــ(1-)

$$-X_1 + (X_2^+ - X_2^-) - 3X_3 \geq -30$$

القيد الثاني يبقى كما هو:

$$X_1 + 9(X_2^+ - X_2^-) - 6X_3 \geq 40$$
$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_+ \geq 20$$
$$-7X_1 + 3(X_2^+ - X_2^-) - X_3 \geq -20$$

القيد الرابع :

(درجتان)، $2X_2 + 10X_3 \leq 90 \Rightarrow -2(X_2^+ - X_2^-) - 10X_3 \geq -90$

$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \geq -90$$
$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3 \geq 0$$

الطريقة الثانية:

تابع الهدف من النوع Max فتكون القيود كلها(≤) أصغر أو يساوي، وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج بالصيغة النظامية كما يلي:

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$MaxZ = -5X_1 + 2(X_2^+ - X_2^-) - 3X_3$$

القيد الأول يبقى كما هو:

$$X_1 - (X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 \leq 30$$

القيد الثاني يضرب بـــ(-1):

$$-X_1 - 9(X_2^+ - X_2^-) + 6X_3 \leq -40$$
$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_+ \leq 20$$
$$-7X_1 + 3(X_2^+ - X_2^-) - X_3 \leq -20$$

القيد الرابع :

$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \leq 90$$
$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 \geq -90 \Longrightarrow -2(X_2^+ - X_2^-) - 10X_3 \leq 90$$
$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3 \geq 0$$

المسألة الثانية: تم البدء بحل نموذج برمجة خطية بطريقة السمبلكس وتابع الهدف فيه هو على الشكل التالي: $\max Z = 2x_1 - x_2$، حيث تم التوصل إلى جدول الحل الوارد أدناه والمطلوب هل الحل الوارد بالجدول مثالي، في حال الاجابة بلا أوجد الحل المثالي النهائي؟ وماهي قيمة تابع الهدف المثلى؟

المتغير / القيد	y_3	y_4	**قيم الحل**
Y_1	-1	1	-1
x_2	1/2	2	1
X_1	-1	-3/2	0
Y_2	1/2	1/2	1/2
z	7/2	4	5

الحل: نجد من قيم عمود الحل بأن هناك قيمة سالبة هي (-1) يجب تطوير مسموحية الحل فسطرها هو سطر محوري، نبحث في السطر المحوري عن القيمة الأشد سلبية فنجد أنها (-1) فتكون عنصر محوري، وعمودها هو عمود محوري.

للحصول على حل جديد(جدول جديد) نأخذ مقلوب العنصر المحوري، نقسم عناصر السطر المحوري على العنصر المحوري فنحصل على القيم الجديدة لها. نقسم عناصر العمود المحوري على العنصر المحوري ونضرب بـــ (-1). أما بقية القيم فيطبق مايلي:

القيمة الجديدة= القيمة القديمة− (المقابل بالسطر المحوري× المقابل بالعمود المحوري)/ العنصر المحوري. من الجدول الجديد نجد أن جميع قيم تابع الهدف السطر z موجبة، وجميع قيم عمود الحل موجبة، وتابع الهدف من النوع max فالحل مثالي، ويكون لدينا ,x1=1، x2=1/2، وقيمة تابع الهدف 3/2، وللتأكد نعوض في تابع الهدف فنحصل على2(1)-1/2=2-1/2=1.5 أو 3/2

المتغيرات	Y1	Y4	قيم الحل
Y3	-1	-1	1
X2	½	5/2	½
X1	-1	-5/2	1
Y2	½	1	0
z	7/2	15/2	3/2

المسألة الثالثة: لدينا نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$$maxz = x_1 + 6x_2 + x_3$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1- أوجد الحل البياني لهذا النموذج؟

2- أوجد جدول السمبلكس الأول وحدد كل من: السطر المحوري، العمود المحوري، العنصر المحوري.

الحل: لايمكن إيجاد الحل البياني لهذا النموذج لأن الطريقة البيانية تستخدم عندما يتضمن نموذج البرمجة الخطية متغيرين فقط، والنموذج الحالي يتضمن ثلاثة متغيرات.

جدول السمبلكس الأول وتحديد كل من: السطر المحوري، العمود المحوري، العنصر المحوري.

نكتب تابع الهدف على شكل معادلة =0

$$maxz - x_1 - 6x_2 - x_3 = 0$$
$$y_1 \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$$
$$y_1 \qquad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

فيكون الجدول كما يلي:

المتغيرات القيود	x_1	x_2عمود محوري	x_3	عمود الحل	قيم عمود الحل/قيم العمود المحوري
y_1	1	2عنصر	3	6	6/2=3سطر

		محوري			محوري
y_1	3	2	2	10	10/2=5
z	−1	−6	−1	0	0

بما أن قيم عمود الحل كلها موجبة فلا يمكن تطوير مسموحية الحل، نختبر مثالية الحل تابع الهدف من نوع max، فيجب أن تكون قيم السطر z كلها موجبة أو أصفار بالنظر للجدول نجدها سالبة فنحتار القيمة الأكثر سلبية وهي −6 فيكون عمودها هو العمود المحوري، وبتقسيم قيم عمود الحل على قيم العمود المحوري واختيار أقل ناتج موجب وهو /3/ فيكون سطر y1 هو سطر محوري والعنصر 2 هو عنصر محوري تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري.

المسألة الرابعة: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$\max Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 9x_2 - 6x_3 \geq 40$$
$$7x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$$
$$|2x_2 + 10x_3| \leq 90$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. مع العلم بأن x_2 غير محدد الاشارة.

استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة القياسية للمسألة.

الحل: تحويل النموذج للصيغة القياسية:

وجميع متغيرات القرار غير سالبة يصبح النموذج

يستبدل x_2 بتفاضل $(x_2^+ - x_2^-)$ وذلك في تابع الهدف وكافة القيود.

$$ManZ = 5X_1 - 2(X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 + 0s_1 - 0s_2 + 0s_3 - 0s_4$$

القيد الأول:

$$X_1 - (X_2^+ - X_2^-) + 3X_3 + s_1 = 30$$

القيد الثاني:

$$X_1 + 9(X_2^+ - X_2^-) - 6X_3 - s_2 = 40$$

القيد الثالث:

$$7X_1 - 3(X_2^+ - X_2^-) + X_3 = 20$$

القيد الرابع :

$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 + s_3 = 90$$
$$2(X_2^+ - X_2^-) + 10X_3 - s_4 = -90$$

$$X_1, X_2^+, X_2^-, X_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

المسألة الخامسة:

- استخدم التحويلات المناسبة للوصول إلى الصيغة النظامية لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$\max Z = 2x_1 - 2x_2 + 5x_3$ ضمن القيود التالية:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 30$$
$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 40$$
$$4x_1 + 5x_2 = 20$$
$$|5x_2 + 8x_3| \leq 100$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$. مع العلم بأن x_3 غير محدد الاشارة.

. ب- لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي: $\min Z = 2x_1 + x_2$ ضمن القيود التالية:

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب: كوّن جدول السمبلكس الأول للنموذج السابق فقط ؟

الحل:

حل الطلب الأول: بطريقتين:

الطريقة الأولى:	الطريقة الثانية:
$\max Z = 2x_1 - 2x_2 + 5({x_3}^+ - {x_3}^-)$ $x_1 - x_2 + 2({x_3}^+ - {x_3}^-) \leq 30$ $-x_1 - 4x_2 + 5({x_3}^+ - {x_3}^-) \leq -40$ $4x_1 + 5x_2 \leq 20$ $4x_1 + 5x_2 \geq 20 \Rightarrow -4x_1 - 5x_2 \leq -20$ $5x_2 + 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \leq 100$ $5x_2 + 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \geq -100 \Rightarrow -5x_2 - 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \leq 100$ $x_1, x_2, {x_3}^+, {x_3}^- \geq 0$	Min=maxw=max(-z)=$-2x_1 + 2x_2 - 5({x_3}^+ - {x_3}^-)$ $-x_1 + x_2 - 2({x_3}^+ - {x_3}^-) \geq -30$ $x_1 + 4x_2 - 5x_3 \geq 40$ $4x_1 + 5x_2 \geq 20$ $4x_1 + 5x_2 \leq 20 \Rightarrow -4x_1 - 5x_2 \geq -20$ $5x_2 + 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \leq 100 \Rightarrow -5x_2 - 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \geq -100$ $5x_2 + 8({x_3}^+ - {x_3}^-) \geq -100$ $x_1, x_2, {x_3}^+, {x_3}^- \geq 0$

حل الطلب الثاني:

نجعل تابع الهدف على شكل معادلة=0

$$\min Z = 2x_1 + x_2 = \; Z - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3 \qquad y_1$$
$$2x_1 + x_2 \geq 3 \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -3 \qquad y_2$$
$$-3x_1 - 2x_2 \leq -6 \qquad y_3$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \qquad y_4$$

قيود عدم السلبية $x_1, x_2 \geq 0$

الجدول

المتغير / القيد	عمود محوري x_1	x_2	قيم الحل
Y1	2	1	3
Y2	2−	1−	3−
Y3	−3	-2	-6
Y4	1	2	4
z	-2	-1	0

مشاكل النقل

هي عبارة عن عملية نقل مواد متشابهة من مراكز الانتاج (نقاط المصدر) إلى مراكز الطلب والاستهلاك بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن. ويفترض نموذج النقل ما يلي:

1. وجود عدد من مراكز الانتاج عددها n مركز وعدد من مراكز الطلب والاستهلاك وعددها m مركزاً.
2. تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز الانتاج I إلى مراكز الطلبJ معلومة ومحددة C_{ij} (حيث رمز c يدل على cost تكلفة).
3. الكميات المنقولة من مراكز الانتاج I إلى مراكز الطلب أيضاً معلومة ويرمز لها بـــ X_{ij} .
4. الهدف هو تخفيض التكاليف الكلية (النقل بأقل التكاليف).
5. تصاغ مشكلة النقل على شكل جدول كالآتي:

مراكز الاستهلاك / مراكز الانتاج	1	2	3	....m	العرض
1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...c1m	b_1
2	C_{21}			C_{2m}	b_2
. .					b_3
n	C_{n1}	C_{n2}		...C_{nm}	b_n
الطلب	A_1	A_2	A_3	...A_m	متساويان

قانون حساب التكلفة الكلية: $TC = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$

نقول عن مسألة النقل إنها متوازنة إذا كانت كمية العرض تساوي كمية الطلب.

طرق الحل الأولي:

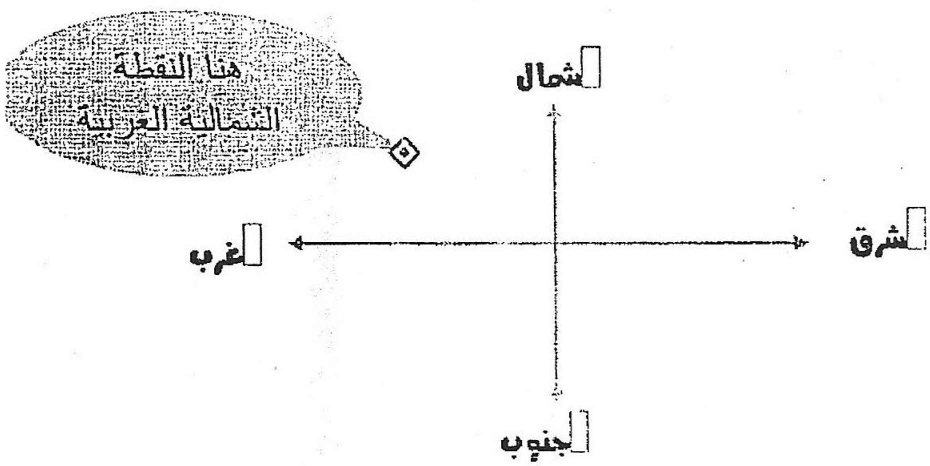
1-طريقة الزاوية الشمالية الغربية(الزاوية العليا اليسرى)

2-طريقة التكلفة الأقل.

3-طريقة فوجل.

الطريقة الأولى: طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

◈ الزاوية الشمالية الغربية تحدد وفق لقاعدة الاتجاهات الجغرافية:



◂◂ حل المسألة:

A إيجاد عدد الوحدات المنتجة التي يقدمها كل مصنع لكل سوق

مثال:

عندنا شركة صناعية تنتج نوعاً من المنتجات بثلاث مصانع والطاقة الإنتاجية لهذه المصانع هي:

700 ، 500 ، 300 على التوالي ← إذاً هذه الطاقة الإنتاجية

وتوزع هذه الطاقة الإنتاجية هذا الإنتاج في خمسة أسواق، والطلب في كل سوق على الشكل التالي:

350 ، ، 250 ، 250 ، 300 ، 350

وأن التكاليف هي عبارة عن المصفوفة التالية:

مصفوفة التكاليف							
الأسواق / المصانع	➊	➋	➌	➍	➎	الطاقة الإنتاجية لكل مصنع	
①	5	7	9	11	6	300	
②	19	8	10	13	5	500	
③	4	9	7	6	3	700	
الكمية المطلوبة لكل سوق	350	300	250	250	350	1500	المجموع

◄◄ شرح الجدول:

لدينا 5 أسواق موزعة على الأعمدة وتمثل هذه الأسواق المقاصد التي نريد توزيع كمية معينة من منتجات المصانع الثلاثة (والتي هي من نوع واحد) على هذه الأسواق ولكل سوق طلب معين:

- السوق الأول ➊ طلبه 350
- السوق الثاني ➋ طلبه 300
- السوق الثالث ➌ طلبه 250
- السوق الرابع ➍ طلبه 250
- السوق الخامس➎ طلبه 350

✂ ولدينا 3 مصانع موزعة على الأسطر وتمثل هذه المصانع المصادر التي سنوزع منها كمية معينة من المنتجات ذات النوع الواحد على الأسواق.

لكن لكل مصنع من المصانع طاقة انتاجية معينة لإنتاج المنتج

- فقدرة المصنع الأول للإنتاج هي 300
- وقدرة المصنع الثاني للإنتاج هي 500
- وقدرة المصنع الثالث للإنتاج هي 700

✂ الأرقام الموجودة ضمن الجدول هي عبارة عن تكاليف النقل، اي مثلاً:

- تكلفة نقل المنتج من المصنع الأول ① إلى السوق الأول ❶ هي 5
- تكلفة نقل المنتج من المصنع الأول ① إلى السوق الثاني ❷ هي 7
- تكلفة نقل المنتج من المصنع الثاني ② إلى السوق الثالث ❸ هي 10
- وهكذا من أجل بقية عناصر تكاليف النقل الموجودة ضمن الجدول

ملاحظة هامة:

نلاحظ أن هذه المسألة **متوازنة** أي ليس لدينا فائض بالإنتاج ولا زيادة بالطلب لأنه:

مجموع الكمية المطلوبة لكل سوق

= طلب السوق❶ + طلب السوق❷ + طلب السوق❸ + طلب السوق❹ + طلب السوق❺

= 350 + 300 + 250 + 250 + 350

= 1500

مجموع القدرة (الطاقة الإنتاجية لكل مصنع)

= الطاقة الإنتاجية للمصنع① + الطاقة الإنتاجية للمصنع② + الطاقة الإنتاجية للمصنع③

= 300 + 500 + 700

= 1500