الجبر الخطي

Dr. Ali AL Shemali

الفضاء المتجهي
Vector Space

تذكرة بمجموعات الأعداد

1) **مجموعة الأعداد الطبيعية:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

2) **مجموعة الأعداد الصحيحة:** $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$

3) **مجموعة الأعداد النسبية:** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

4) **مجموعة الأعاد الحقيقية ($\mathbb{R}$):** تشمل جميع المجموعات السابقة بالإضافة إلى الأعداد غير النسبية، كالأعداد:

$$(e, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\ldots)$$

5) **مجموعة الأعداد العقدية:** $\mathbb{C} = \left\{a + bi \ : a, b \in \mathbb{R}, i \ = \sqrt{-1}\right\}$

قانون التشكيل الداخلي

لتكن لدينا مجموعة A غير خالية، معرف عليها العملية *. نقول أن العملية * هي تشكيل داخلي على A عندما:

$$\forall x , y \in A \rightarrow (x , y) \in A$$

بمعنى آخر، نقول أن A مغلقة بالنسبة للعملية * أو مغلقة تحت العملية *.

تعريف: أي مجموعة غير خالية ومزودة بقانون تشكيل داخلي واحد على الأقل تسمى بنية جبرية، ويرمز لها (A,*).

مثال-1: هل عملية الجمع هي تشكيل داخلي على مجموعة الأعداد الصحيحة؟ أو هل $\mathbb{Z}$ مغلقة بالنسبة للجمع؟

مثال-2: لتكن لدينا المجموعة S، وهي مجموعة الأعداد الفردية: S={1,3,5,7,.......}

هل S مغلقة بالنسبة للضرب؟

هل S مغلقة بالنسبة للجمع؟

الزمرة

لتكن لدينا مجموعة A غير خالية، مزودة بقانون تشكيل داخلي *. عندئذ نقول عن البنية الجبرية (A,*) أنها زمرة، إذا تحققت الشروط التالية:

1) الشرط التجميعي: $\forall a,b,c \in A \Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$

2) وجود العنصر المحايد: $\forall a \in A, \exists e \in A \Rightarrow a*e = e*a = a$

3) وجود العنصر المعكوس: $\forall a \in A, \exists a' \in A \Rightarrow a*a' = a'*a = e$

ونقول عن الزمرة (A,*) أنها تبديلية، إذا تحقق قانون التبديل:

$$\forall a,b \in A \Rightarrow a*\mathrm{b} = b*a$$

مثال-3: هل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والمعرف عليها عملية +، زمرة تبديلية؟

الحقل

هو كل مجموعة غير خالية F ومزودة بقانوني تشكيل داخلي (F,*,o) وتحقق الشروط التالية:

1) (F,*) زمرة تبديلية.

2) (F,o) زمرة تبديلية.

2) العملية (o) توزيعية على العملية (*):

$$\forall a,b,c \in F : a \circ (b * c) = a \circ b * a \circ c$$

مثال-4: هل $(\mathbb{R},+,.)$ تشكل حقل ؟

الفضاء المتجهي

تعريف: إذا كانت V مجموعة غير خالية، معرف عليها عمليتا الجمع والضرب العددي، فإننا نقول إن (V,+,.) فضاء متجهي على الحقل F، إذا تحققت الخواص التالية:

$$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V \ , \quad \forall \alpha, \beta \in F$$

1) خاصية الانغلاق تحت الجمع: $\vec{u}+\vec{v} \in V$

2) خاصية الابدال في الجمع: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

3) خاصية التجميع في الجمع: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w} = \vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$

4) وجود المحايد الجمعي: $\exists \vec{0} \in V \ : \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

5) وجود المعكوس الجمعي: $\exists -\vec{u} \in V \ : \vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$

6) خاصية الانغلاق تحت الضرب العددي: $\alpha.\vec{u} \in V$

7) خاصية توزيع عدد على جمع متجهات: $\alpha.(\vec{u}+\vec{v})=\alpha.\vec{u}+\alpha.\vec{v}$

8) خاصية توزيع جمع الأعداد على المتجه: $(\alpha+\beta).\vec{u}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{u}$

9) خاصية التوافقية في الضرب العددي: $(\alpha.\beta).\vec{u}=\alpha.(\beta.\vec{u})$

10) وجود المحايد الضربي: $\exists 1\in F : 1.\vec{u}=\vec{u}$

- المتجهات في الفضاء المتجهي لا تمثل بالضرورة متجهات هندسية (أشعة)، بل يمكن أن تكون أي كائنات رياضية يحقق شروط الفضاء المتجهي. ويمكن التمييز بين ثلاث نماذج أساسية للفضاءات المتجهة على الحقل $\mathbb{R}$:

$n \geq$

- الفضاء $\mathbb{R}^n$ (الفضاء الإقليدي من البعد n) ويسمى أيضاً فضاء الأشعة.

$\mathbb{R}^2$ يمثل مجموعة الأشعة في المستوي (x,y)، و $\mathbb{R}^3$ يمثل مجموعة الأشعة في الفراغ (x,y,z).

- الفضاء P_n (فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $n \geq$): $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$
- الفضاء M_{mxn} (فضاء المصفوفات): يتألف من جميع المصفوفات ذات m صفوف و n أعمدة.

مثال-5:

ليكن لدينا $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ، هل $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء متجهي على الحقل $\mathbb{R}$؟

تمرين-1:

ليكن لدينا $M_{2x2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ ، هل $(M, +, .)$ فضاء متجهي على الحقل $\mathbb{R}$؟

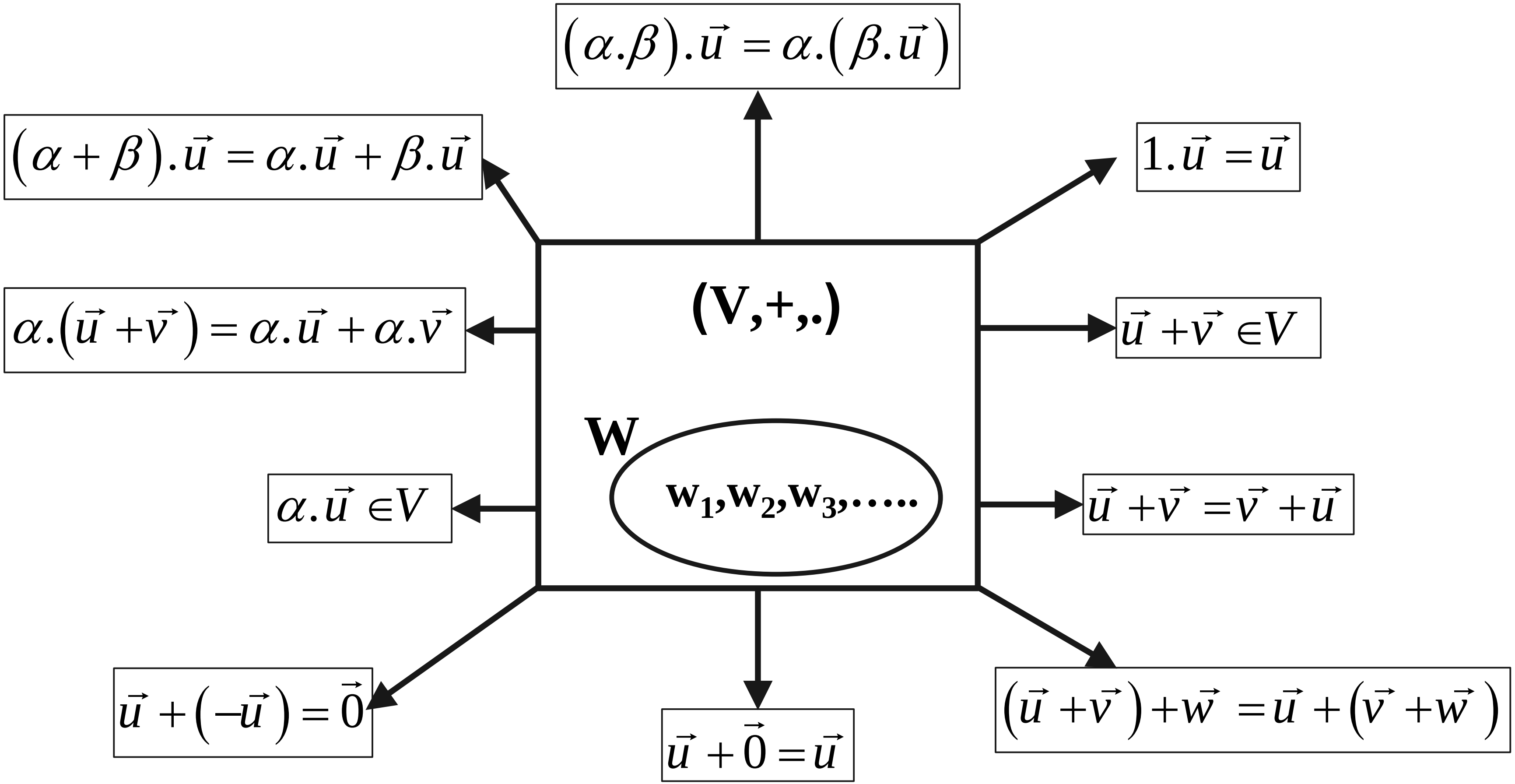
تمرين-2:

ليكن لدينا $P_2(x) = \{ax + bx^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ ، هل $(P_2(x), +, .)$ فضاء متجهي على الحقل $\mathbb{R}$؟

الجبر الخطي

Dr. Ali AL Shemali

الفضاء الجزئي (Subspace)
أساس وبعد الفضاء المتجهي (Basis &Dimension)


$(\alpha.\beta).\vec{u} = \alpha.(\beta.\vec{u})$
$(\alpha+\beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$
$1.\vec{u} = \vec{u}$
(V,+,.)
$\alpha.(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v} \in V$
W
$w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots$
$\alpha.\vec{u} \in V$
$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$
$\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$
$\vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$
$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

الفضاء الجزئي

تعريف: ليكن لدينا V فضاء متجهي على الحقل F، ولتكن W مجموعة جزئية من V. نقول أن W فضاء جزئي من V، إذا كانت W نفسها فضاء متجهي على F، ذلك بالنسبة لنفس العمليتين المعرفتين على V.

مبرهنة: تكون W فضاءً جزئياً من V، إذا وفقط إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1) وجود المحايد الجمعي ($\vec{0} \in W$).

2) W مغلقة تحت الجمع : $\forall \vec{u},\vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in W$

3) W مغلقة تحت الضرب: $\forall \vec{u} \in W , \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha.\vec{u} \in W$

ملاحظة: إذا لم يذكر في نص السؤال أية معلومة عن الحقل، نفرضه دوماً $\mathbb{R}$، بغض النظر عن شروط المجموعة المعطاة.

أمثلة:

مثال-1: أثبت أن $W=\{(x,x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$، فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ على الحقل $\mathbb{R}$.

مثال-2: أثبت أن $W=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: ax+by=0\}$، فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$.

مثال-3: أثبت أن $W=\{(x,y,z): x\geq 0\}$، ليست فضاء جزئي.

مثال-4: أثبت أن $W=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$، ليست فضاء جزئي.

مثال-5: هل $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ فضاء جزئي من M_{2x2}؟

أساس وبعد فضاء متجهي

تعريف: لتكن $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\dots\dots,\vec{v}_n\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي V على الحقل F،

وحيث $c_1,c_2,c_3,\dots\dots\dots c_n$ أعداد قياسية، وكان :

$$c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+c_3\vec{v}_3+\dots\dots+c_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

عندئذ:

1) تكون المجموعة S مرتبطة خطياً، إذا كانت الثوابت $c_1,c_2,c_3,\dots\dots\dots c_n$ ليست جميعها أصفاراً.

2) تكون المجموعة S مستقلة خطياً، إذا كانت جميع الثوابت $c_1,c_2,c_3,\dots\dots\dots c_n$ تساوي الصفر.

مبرهنة: إذا كان أحد متجهات S يساوي الصفر، عندئذ تكون S مرتبطة خطياً.

تعريف: نقول عن المجموعة S أنها تولّد الفضاء V، إذا كان أي عنصر من V يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر S.

أساس وبعد فضاء متجهي

تعريف: لتكن $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots\ldots,\vec{v}_n\}$ مجموعة جزئية من الفضاء المتجهي V، نقول عن S أنها أساس للفضاء V، إذا حققت الشرطين التاليين:

1) S تولّد V

2) S مستقلة خطياً

مثال-6: أثبت أن $S=\{(1,0),(0,1)\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$.

ملاحظة: لتكن المجموعة $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\ldots,\vec{e}_n\}$ تحتوي على n من المتجهات في $\mathbb{R}^n$، حيث:

$$\vec{e}_1=(1,0,0,\ldots\ldots0),\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots\ldots0),\vec{e}_n=(0,0,0,\ldots\ldots1)$$

فإنه وبشكل مماثل للمثال السابق، يمكن إثبات أن هذه المتجهات مستقلة خطياً وتولّد $\mathbb{R}^n$، وبذلك تكون هذه المتجهات أساس لـ $\mathbb{R}^n$، ويسمى هذا الأساس بالأساس القياسي للفضاء $\mathbb{R}^n$.

أساس وبعد فضاء متجهي

تعريف: إذا كانت $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots\ldots,\vec{v}_n\}$ أساس للفضاء V، فإن عدد المتجهات n في S يسمى بعد الفضاء V ونكتب: dimV=n

وعليه يمكن القول أن $\dim\mathbb{R}^n=n$، لأن الأساس المعتاد لـ $\mathbb{R}^n$ يحتوي على n من المتجهات.

ملاحظة: إذا كان عدد عناصر المجموعة S أقل أو أكثر من بعد الفضاء الإقليدي، فإن S لا يمكن أن تكون أساساً لذلك الفضاء.

مثال-7: هل $S=\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$، أثبت ذلك.

مثال-8: أثبت أن $S=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ لا تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$.

تمرين-1: أثبت $S=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ أساس للفضاء M_{2x2}.

تمرين-2: أثبت $S=\{(0,0,1),(0,1,2),(1,1,0)\}$ تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$..

أساس وبعد فضاء متجهي

مبرهنة: لتكن $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3,\ldots\ldots,\vec{v}_n\}$، ولتكن A مصفوفة مربعة من الدرجة n والتي أعمدتها متجهات S، عندئذ تكون S أساس للفضاء $\mathbb{R}^n$، إذا وفقط كان محدد المصفوفة A غير معدوم أي $\det A\neq 0$.

وعليه نستنتج أنه إذا كان أحد متجهات S صفرياً أو إذا كان هناك متجهين على الأقل في S مرتبطين خطياً، فإن S لا يمكن أن تكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^n$ لأن في كلتا الحالتين يكون $\det A=0$.

مثال-9: أي من هذه المجموعات تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

C={(1,3,5),(1,0,1),(0,1,1)}	B={(0,3,3),(1,0,1),(0,1,1)}	A={(0,0,0),(1,0,1),(0,1,1)}

مثال-10: أي من هذه المجموعات لا تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$؟

C={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}	B={(1,2,3),(1,0,-1),(3,-1,0),(2,1,-2)}	A={(1,0,1),(0,1,1)}

تمرين-3: أثبت وبطريقتين أن W={(1,-1,0),(0,1,1),(3,-5,-2)} لا تشكل أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

(ملاحظة: استخدم طريقة غاوس لحل جملة المعادلات والحصول على قيم الثوابت).

الجبر الخطي

Dr. Ali AL Shemali

فضاء الحل للنظام المتجانس (الفضاء الصفري)
Null Space

الفضاء الصفري

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = 0\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}$$

يمكن كتابة جملة المعادلات المبينة أعلاه بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{\text{mxn}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}_{\text{nx1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{mx1}} \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

الفضاء الصفري

لتكن **A** مصفوفة من السعة mxn على الحقل $\mathbb{R}$، ولتكن المجوعة W، حيث:

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \right\}$$

تسمى W فضاء الحل للنظام المتجانس والذي يسمى أيضاً بالفضاء الصفري للمصفوفة **A** ونرمز له null(**A**)

هذا الفضاء هو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$، حيث أنه يحقق الشروط الثلاثة للفضاء الجزئي:

$$1)\quad \mathbf{A0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} \in W$$

$$2)\quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W\ ,\ \mathbf{Av} = \mathbf{0}\ \&\ \mathbf{Au} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{Au} + \mathbf{Av} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{W}$$

$$3)\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A(\alpha.\mathbf{u}) = \alpha.(\mathbf{Au}) = \alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha.\mathbf{u} \in W$$

أساس الفضاء الصفري $B_{null(A)}$ هو مجموعة من المتجهات المستقلة خطياً التي تولّد جميع عناصر null(**A**). عدد هذه المتجهات يساوي بعد الفضاء الصفري، وهو ما يسمى dim(null(**A**))

أمثلة:

مثال-1: أوجد أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس التالي:

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0$$

مثال-2: تحقق من وجود أساس للفضاء null(A)، حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال-3: أوجد أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس التالي، وذلك من أجل $\alpha=3$ و $\alpha=0$:

$$(\alpha - 2)x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + (\alpha - 2)x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + (\alpha - 2)x_3 = 0$$

تمارين:

أوجد أساس وبعد null(**A**) لكل ما يلي:

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

3)

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 0$$

4)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$