الجبر الخطي

Dr. Ali AL Shemali

إقطار مصفوفة
Matrix Diagonalization

المصفوفات المتشابهة

تعريف: نقول عن المصفوفتين A و B المربعتين من الدرجة n أنهما متشابهتان، إذا وجدت مصفوفة مربعة من الدرجة n قابلة للعكس (غير شاذة) بحيث يتحقق:

$$PB = AP \qquad (1)$$

نضرب طرفي العلاقة 1 من اليسار بـ P^{-1} ، فنجد:

$$B = P^{-1}AP \qquad (2)$$

نضرب طرفي العلاقة 1 من اليمين بـ P^{-1} ، فنجد:

$$A = PBP^{-1} \qquad (3)$$

مبرهنة: لتكن المصفوفتان A و B متشابهتين عندئذ:

1- تكون للمصفوفتين A و B القيم الذاتية نفسها وكثير الحدود المميز نفسه:

$$\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$$

2- يكون لهما الأثر نفسه والمحدد نفسه:

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) \quad , \quad \det(A) = \det(B)$$

3- إذا كان **x** متجهاً ذاتياً موافقاً للقيمة λ، فإن P^{-1}**(x)** هو المتجه الذاتي للمصفوفة B الموافق لنفس القيمة الذاتية λ

المصفوفة القابلة للإقطار

تعريف: نقول عن مصفوفة مربعة A من الدرجة n أنها مصفوفة قابلة للإقطار، أو يمكن إقطارها، إذا كانت مشابهة لمصفوفة قطرية، بعبارة مكافئة: إذا وجدت مصفوفة قابلة للعكس P من الدرجة n تحوّل المصفوفة A إلى شكل قطري بالعلاقة:

$$P^{-1}AP = D$$

عندئذ نسمي المصفوفة P **بمصفوفة التحويل**.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي تكون المصفوفة المربعة A من الدرجة n، قابلة للإقطار هو أن يكون لها n من المتجهات الذاتية المستقلة خطياً. عندئذ:

1- تكون المصفوفة القطرية المشابهة D هي: $D=\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$، حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ القيم الذاتية لـ A

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ملاحظة: يوجد عدد غير منتهي من المصفوفات المشابهة للمصفوفة A، ولكن ليس بالضرورة أن تكون المصفوفة B المشابهة لـ A مصفوفة قطرية.

2- تكون مصفوفة التحويل P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية المستقلة خطياً، وهذه المتجهات موضوعة بترتيب القيم الذاتية نفسها في المصفوفة D.

3- لكل قيمة ذاتية λ يكون التعداد الجبري مساوياً للتعداد الهندسي.

مبرهنة: إذا كانت المصفوفتان A و B متشابهتين، أي تحققان العلاقة $A = PBP^{-1}$ من أجل مصفوفة قابلة للعكس P، فإن مصفوفة القوى لـ A تعطى بالعلاقة:

$$A^k = P.B^k.P^{-1}$$

من أجل أي عدد صحيح موجب k، وإذا كانت A غير شاذة (B غير شاذة بالضرورة) فإن المبرهنة تبقى صحيحة من أجل أي عدد صحيح k (سالباً كان أو موجباً).

حالة خاصة: إذا كانت المصفوفة A قابلة للإقطار، أي أن مصفوفتها المشابهة D مصفوفة قطرية، فيمكن حساب A^k من العلاقة :

$$A^k = P.D^k.P^{-1} = P.\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.P^{-1}$$

مبرهنة: تكون المصفوفة المربعة قابلة للعكس إذا لم يكن الصفر قيمة ذاتية لها.

مثال-1: إذا علمت أن القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ هي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بيّن ما إذا كانت A قابلة للإقطار، في حال الإيجاب، أوجد المصفوفة القطرية المشابهة D ومصفوفة التحويل P، ثم اكتب صيغة الإقطار لـ A.

مثال-2: لتكن صيغة الإقطار للمصفوفة A معطاة بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1) عيّن القيم الذاتية لـ A

2) أوجد أساس كل فضاء ذاتي لـ A

3) هل A^{-1} موجودة؟ علّل إجابتك باستخدام مفهوم القيم الذاتية.

4) اكتب صيغة الإقطار للمصفوفة A^3، ثم أوجد A^3

مثال-3: لتكن المصفوفة
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1) علّل بمجرد النظر كون A قطورة.

2) أوجد بمجرد النظر المصفوفة القطرية D المشابهة للمصفوفة A

3) تحقق من أن مصفوفة التحويل للمصفوفة A هي:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

ملاحظة: حلّ الطلب الثالث من إيجاد المتجهات الذاتية للمصفوفة A

تطبيق مفهوم القيم الذاتية في مسائل الإجهادات

عند دراسة حالة إجهاد مستوٍ، يمكن إيجاد الإجهادات الرئيسية واتجاهاتها بعدة طرق.

من جهة، يمكن استخدام العلاقات التحليلية المباشرة أو دائرة مور لإيجاد قيم الإجهادات الرئيسية وزواياها.

ومن جهة أخرى، يمكن استخدام مفهوم القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة الإجهاد، حيث تمثل القيم الذاتية قيم الإجهادات الرئيسية، بينما تعطي المتجهات الذاتية اتجاهات هذه الإجهادات، أي المستويات التي ينعدم عليها إجهاد القص.

عند استخدام مفهوم القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة الإجهاد، يتم اتباع نفس الخطوات الرياضية المتبعة في إيجاد القيم والمتجهات الذاتية لأي مصفوفة مربعة.

إلا أنه يجب الانتباه إلى الملاحظة التالية:

عند إيجاد المتجهات الذاتية لمصفوفة الإجهاد، يظهر عادةً مجهول اختياري، مما يؤدي إلى الحصول على عدد لا نهائي من المتجهات الذاتية التي لها نفس المنحى.

ولتحديد اتجاه واحد وواضح للمتجه الذاتي، أي اتجاه الإجهاد الرئيسي، يتم تطبيع المتجه الذاتي (normalization) بحيث يصبح طوله مساوياً للواحد، أي إن مجموع مربعات مركباته يساوي الواحد.

ولتطبيع المتجه الذاتي $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$، نطبق الخطوات التالية:

1) نحسب طول المتجه:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

2) نقسم كل مركبة على الطول:

$$\mathbf{v}^{\text{norm}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

يمثل $\mathbf{v}^{\text{norm}}$ الاتجاه النهائي للإجهاد الرئيسي، والذي طوله يساوي واحد.

مثال-4: تعطى حالة الإجهاد عند نقطة من عنصر بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

إذا علمت أن الإجهادات الرئيسية تمثل القيم الذاتية للمصفوفة **σ**. **المطلوب:**

إيجاد قيم الإجهادات الرئيسية واتجاهاتها، أي المتجهات الذاتية المطبّعة المقابلة لها.

مثال-5: أعد حل طلبات المثال السابق وذلك بالنسبة لمصفوفة الإجهاد:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 0 \\ 40 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

مثال-6: لتكن مصفوفة الإجهاد عند نقطة من عنصر $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{MPa}$ ، **والمطلوب:**

1) أوجد قيم الإجهادات الرئيسية للمصفوفة **B**.

2) هل $\begin{bmatrix} 0.894 \\ 0 \\ 0.447 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي لـ **B**؟