

حول ملائمة قياسات نظام الـ GPS لنقاط من الشبكة الجيوديزية جرى ترشيحها مسبقاً مع مثيلاتها في نظام الارتسام

د.م. عبد الرزاق عايد عجاج*

الملخص

نعالج مسألة ملائمة الإحداثيات (x',y') لنقاط من الشبكة الجيوديزية التي نتجت عن الترشيح مع مثيلاتها في النظام المستوي، معالجة تمرّ بتحويل من الدرجة الأولى بعد اشتقاق معادلتيه اشتقاقاً يستند إلى خواص التمثيل المطابق لمستوي على ذاته معتمدين في ذلك توابع الحقل العقدي. لكي نظهر فعالية معالجة قياسات نظام الـ GPS، رُشِّحَتْ D_x, D_y ، لننتقل بواسطة هذا الترشيح إلى إحداثيات جديدة x',y' ، ومن ثمّ طُبِّقَ تحويل مقترح المشتق من قبلنا استناداً إلى خواص التطابق على الإحداثيات المرشحة (x',y') لننتقل إلى الإحداثيات النهائية (X'',Y'') الناتجة عن التحويل لتقارن إحداثيات التحويل بمثيلاتها في النظام المستوي. ولكي نظهر فعالية هذا التحويل طُبِّقَ التحويل المقترح على إحداثيات مرشحة مسبقاً لنقاط من الشبكتين الأولى والثانية، وكذلك على إحداثيات النقاط التي نتجت عن قياسات نظام الـ GPS. بيّنت النتائج التي تمّ الحصول عليها فعالية الطريقة المقترحة بهدف ملائمة إحداثيات قياسات نظام الـ GPS مع الإحداثيات المستوية، وجرى بيان ذلك من خلال المخطط التكراري لفروق الإحداثيات (D_x'', D_y'') بين الإحداثيات المحولة والمستوية ليؤكد الاقتراب من التوزع النظامي، إضافة؛ إن هذه الطريقة المقترحة تبقى على المخططات المساحية والعقارية ذات الكلفة المادية العالية دون استبدالها.

الكلمات المفتاحية: ملائمة القياسات، الترشيح، الإحداثيات المرشحة، التوزع النظامي، الارتسام المطابق، النظام المستوي.

* أستاذ مساعد في قسم الهندسة الطبوغرافية - كلية الهندسة المدنية - جامعة دمشق

- مقدمة البحث:

سبق أن عالجت في البحث (عجاج، 2011) [4] الفروق الناتجة عن مقارنة إحدائيات شبكة المثلاث من الدرجة الأولى والثانية الناتجة عن الحسابات التقليدية بنظيراتها الناتجة عن القياسات بواسطة نظام GPS. اقترحنا آنذاك ترشيح المعلومات التي تقدمها مقارنة إحدائيات نظام GPS بإحدائيات النظام المستوي للنقاط الجيوديزية ذاتها من الأخطاء العرضية المتوافرة؛ وذلك باستخدام مرشح من الدرجة الأولى وحسبنا عليه الفروق

$$D_x = x - X; D_y = y - Y$$

لنتمكن من خلال ذلك حساب الإحدائيات (x',y') المعدلة.

أظهرت الدراسة الإحصائية للفريقين $D_x; D_y$ ، وذلك برسم (المخطط التكراري) (Histogram) لكل منهما، ابتعاد كل من الفريقين عن التوزيع النظامي (Normal distribution).

نسعى في هذا البحث إلى معالجة مسألة ملائمة الإحدائيات المعدلة (x',y') بالترشيح للنقاط المدروسة جميعها مع مثيلاتها في النظام الإحدائي المستوي، معالجة تمرُّ بتحويل من الدرجة الأولى ونشتق معادلتيه اشتقاقاً يستند إلى خواص التمثيل المطابق لمستوى على ذاته مستخدمين في ذلك توابع الحقل العقدي.

هدف البحث: اقتراح تحويل جديد يسعى إلى حذف الجزء النظامي بين الجملتين، عندما لا يمكننا طريقةً أخرى لحذف الجزء النظامي كلياً، كما هو الحال في مسألة الترشيح. لذلك نعد إلى تحويل مطور مقترح من قبلنا لحذف ما تبقى من هذا الجزء النظامي في الإحدائيات المعالجة بطريقة الترشيح.

مشكلة البحث: إنَّ المشكلة الأساسية في أي تحويل خطي للإحدائيات كما هي الحال في التحويل المقترح بهذا البحث، تكمن في المحافظة على المقياس في المجال المحوّل، وهو أمرٌ لا يتفق مع ما هو مألوف في موضوع الارتسامات المطابقة، غير أنَّ هذا النقص يتلاشى إذا علمنا أنَّ الجملتين المحولتين، إحدهما إلى الأخرى متقاربتان، وهما: الجملة

الناتجة عن الترشيح، والجملة الأخرى الناتجة عن التحويل للإحدائيات المرشحة.

منهجية البحث: استندت منهجية البحث إلى:

1. اشتقاق علاقات التحويل عن طريق التوابع العقدية، وهي مسألة غير مألوفة في المراجع المختصة.
2. حساب الأخطاء على ثوابت التحويل، ومن ثمَّ حساب الخطأ على كل من الإحدائيتين (X'',Y'') الناتجين عن التحويل المقترح.
3. حساب تقارب خطوط الطول، وهو ناتج عن دوران ضئيل لمستوى بالنسبة إلى مستوى الإحدائيات المرشحة، وهو أمرٌ متوقع نظراً إلى تقارب الجملتين.
4. أعطينا تطبيقاً عددياً لتوضيح النقاط الأساسية التي تنتج عن هذا التحويل المقترح والتي عُرضت في البحث.
5. أعطينا حساباً شاملاً من أجل تقييم الخطأ على كل من X''',Y''' الناتجين عن التحويل بعد ترشيح الإحدائيات.
6. قدمنا في هذا البحث مدى خضوع الرواسب بعد التحويل إلى التوزيع النظامي استناداً إلى المدرج التكراري لكل من $D_{X''}, D_{Y''}$.

الدراسات النظرية السابقة للبحث:

جرت محاولات عدة لتحويل الإحدائيات الناتجة عن قياسات GPS إلى الإحدائيات المستوية مباشرة بتطبيق تحويلات خطية مألوفة، وكانت النتائج غير مرضية، بسبب تخطي طريقة أخرى للمعالجة كالترشيح مثلاً، من أجل حذف جزء نظامي ناتج عن أسباب جيوفيزيائية، كما أشرنا إليها في هذا البحث، وطريقتنا الحالية تهدف إلى تحويل إحدائيات مرشحة سابقاً بمرشح رياضي كما بيناه في بحث سابق (4)، ليصار إلى تحويل الإحدائيات المرشحة بواسطة تحويل خطي مقترح بهذه الدراسة.

1- اشتقاق علاقات التحويل استناداً إلى التمثيل المطابق لفضاء ذي بعدين على نفسه:

ليكن لدينا مجموعة نقاط E من المستوى $(E \in \pi)$ ومجموعة جزئية $E_1 \subset E$ إذ $E_1 \in \pi'$ ، وكذلك $E \in \pi'$ ،

$$\begin{aligned} X'' &= a_0 + a_1 x' + a_2 y' \\ Y'' &= b_0 - a_2 x' + a_1 y' \end{aligned} \quad (3)$$

إذ: x', y' - إحداثيات النقطة الناتجة عن الترشيح.
 X'', Y'' - الإحداثيات الناتجة عن تحويل x', y' إلى
 إحداثيات مستوية جديدة.

- تمثل المركبتان a_0, b_0 انسحاب النظام الإحداثي في
 المستوي عند التطبيق المطابق للمستوي على المستوي
 ذاته، أما a_1, a_2 فتعتبران عن دوران النظام الإحداثي
 عند التطبيق المطابق، ويتضمنان المقياس الناتج عن

$$\text{التطبيق بدلالة العلاقة: } m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

يسمح هذان التابعان بالمرور من نقاط المجموعة $E \in \pi$
 إلى نقاط الصورة من المجموعة $E' \in \pi'$ بشكل مطاب
 ووحيد. نقول: إن هذا التحويل هو تطبيق R^2 في R^2 .
 علينا أن نلاحظ أن هاتين العلاقتين هما العلاقتان اللتان
 جرى اشتقاقهما استناداً إلى التابع التحليلية، وهو

اشتقاق جديد وغير مألوف سابقاً.

يمثل كل من التابعين (2) النموذج الرياضي لتحويل
 الإحداثيات (x, y) الناتجة عن قياسات نظام GPS إلى
 إحداثيات في نظام ديكارتي في مستوي π' يقترّب كثيراً من
 مستوي الارترسام، ويمثل كل منهما مستويًا في فضاء ثلاثي
 الأبعاد (x', y', X'') و (x', y', Y'') ويتطلب تعيينهما تعيين
 المجاهيل (a_0, b_0, a_1, a_2) . إذاً من أجل هذا التعيين يكفي
 معرفة إحداثيات نقطتين في النظامين (أي في
 المستويين π و π')، ويفضل عادةً معرفة أكثر من نقطتين
 من أجل تعيين المجاهيل a_0, b_0, a_1, a_2 بطريقة المربعات
 الصغرى (Method of least squares).

لنكن $(a_{00}, b_{00}, a_{10}, a_{20})$ قيمة تقريبية لأمثال التابعين (2)
 و (da_0, db_0, da_1, da_2) التغيرات الطارئة عليها، فإذا تصورنا
 إحداثيات النقطة $P' \in \pi'$ وهي صورة $P \in \pi$ بالتحويل

$$\text{محتوية على أخطاء عشوائية } V_{X''}, V_{Y''}$$

لدينا عندئذٍ معادلات الأخطاء الآتية في شكلها المصفوفي:

نسعى الآن لإيجاد تحويل يستطيع أن يقابل كل نقطة
 $P \in \pi$ بنقطة صورة $P' \in \pi'$ ، ونقطة وحيدة من المستوي
 الآخر π . من أجل ذلك نلجأ إلى التابع التحليلية لسبب بسيط
 هو أن هذه التابع تعرف بسهولة التطابق عند تطبيق
 المستوي π على المستوي π' (Wassouf, 1997) [8].

نفرض أن النقطة $P \in \pi$ معرفةً بالعدد العقدي
 $z = x' + iy'$ ، والنقطة $P' \in \pi'$ معرفةً بالعدد العقدي
 $Z = X'' + iY''$ ، كما نفرض أن Z يرتبط ب z بواسطة
 التابع $Z = f(z)$ بحيث لدينا التابعان:

$$\begin{aligned} X'' &= f(x', y') \\ Y'' &= g(x', y') \end{aligned} \quad (1)$$

اللذان هما مركبتا التابع التحليلي $Z = X'' + iY''$ ، إذ x', y'
 هما إحداثيات النقطة الجيوديزية اللتان نتجتا عن الترشيح
 (عجاج، 2014) [4]، أما X'', Y'' فهما الإحداثيات الناتجة
 عن التحويل.

فإذا اخترنا الآن نموذجاً رياضياً لكل من التابعين (1)
 ممثلين بكثيري حدود من الدرجة الأولى من الشكلين:

$$\begin{aligned} X'' &= a_0 + a_1 x' + a_2 y' \\ Y'' &= b_0 + b_1 x' + b_2 y'. \end{aligned} \quad (2)$$

تمثل هاتان العلاقتان الجزء الخطي من التحويل العام
 المعطى بكثيري الحدود الآتيتين:

$$X = \sum_j^n \sum_i^n a_{ij} x^i y^j \quad ; \quad Y = \sum_j^n \sum_i^n b_{ij} x^i y^j$$

وإذا أخضعنا هذين التابعين إلى شرطي كوشي-ريمان

(Cauchy-Riemann) (أحمد محسن، 2012) [3]

$$\frac{\partial X''}{\partial x'} \equiv \frac{\partial Y''}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial X''}{\partial y'} \equiv -\frac{\partial Y''}{\partial x'}$$

عندئذٍ نحصل على العلاقات التي تعطي أمثال التحويل
 (1) أي يكون لدينا:

$$\frac{\partial X''}{\partial x'} = a_1 \quad ; \quad \frac{\partial Y''}{\partial y'} = b_2 \Rightarrow a_1 = b_2$$

$$\frac{\partial X''}{\partial y'} = a_2 \quad ; \quad \frac{\partial Y''}{\partial x'} = b_1 \Rightarrow a_2 = -b_1$$

نحصل بالاشتقاق والمطابقة على تابعي التحويل الآتيتين:

بتطبيق قانون انتشار الأخطاء وحساب أمثال الوزن للمتغيرات a_0, b_0, a_1, a_2 ، نعين الخطأ على كل من التابعين Y'', X'' .

3-2- حساب الخطأ على كل من المقدارين (x,y) محسوبين من النموذج المقترح:

من المطلوب والمفيد أن نحسب الخطأ على كل من X'', Y'' لكل نقطة محولة بواسطة التحويل المقترح، ونظراً إلى أن X'', Y'' نتجتا عن تحويل الإحداثيات x', y' لكل نقطة، وأن أمثال التحويل a_0, b_0, a_1, a_2 قد حُسِبَتْ بطريقة المربعات الصغرى، إذا يؤول حساب أمثال الوزن (Cofactor) لكل X'', Y'' من X'', Y'' إلى حساب أمثال وزن التابع للمجاهيل a_0, b_0, a_1, a_2 التي حُسِبَتْ، أي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} X'' &= f(a_0, b_0, a_1, a_2) \\ Y'' &= g(a_0, b_0, a_1, a_2) \end{aligned}$$

فإذا أخذنا X'' مثلاً يكون أمثال الوزن لهذا التابع معطى بقاعدة تينسترا (Tienstra, 1956) [7] كالآتي:

$$\begin{aligned} Q_{X''X''} &= Q_{a_0a_0} + 0 + \left(\frac{\partial X''}{\partial a_1}\right)^2 \times Q_{a_1a_1} + \left(\frac{\partial X''}{\partial a_2}\right)^2 \times Q_{a_2a_2} + 2Q_{a_0a_1} \frac{\partial X''}{\partial a_0} \cdot \frac{\partial X''}{\partial a_1} + \\ &+ 2Q_{a_0a_2} \frac{\partial X''}{\partial a_0} \cdot \frac{\partial X''}{\partial a_2} + 2Q_{a_1a_2} \frac{\partial X''}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial X''}{\partial a_2} \quad (9) \\ \frac{\partial X''}{\partial b_0} &= 0 \end{aligned}$$

وإذا أخذنا بالحسبان علاقة X'' المعطاة بالعلاقة (3) يكون لدينا:

$$\begin{aligned} Q_{X''Y''} &= Q_{a_0a_0} + 0 + x'^2 Q_{a_1a_1} + y'^2 Q_{a_2a_2} + \\ &2Q_{a_0a_1} x' + 2Q_{a_0a_2} y' - 2Q_{a_1a_2} x' y' \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

وبحساب مماثل يكون لدينا:

$$\begin{aligned} Q_{Y''Y''} &= 0 + Q_{b_0b_0} + \left(\frac{\partial Y''}{\partial a_2}\right)^2 \times Q_{a_2a_2} + \left(\frac{\partial Y''}{\partial a_1}\right)^2 \times Q_{a_1a_1} - 2Q_{b_0a_2} \frac{\partial Y''}{\partial b_0} \cdot \frac{\partial Y''}{\partial a_2} + \\ &+ 2Q_{b_0a_1} \frac{\partial Y''}{\partial b_0} \cdot \frac{\partial Y''}{\partial a_1} - 2Q_{a_1a_2} \frac{\partial Y''}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial Y''}{\partial a_2} \quad (11) \end{aligned}$$

أي يكون:

$$\begin{aligned} Q_{Y''X''} &= 0 + Q_{b_0b_0} - x'^2 Q_{a_2a_2} + y'^2 Q_{a_1a_1} - \\ &2Q_{b_0a_2} x' + 2Q_{b_0a_1} y' - 2Q_{a_1a_2} x' y' \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'' + V_{X''} &= (a_{00} + da_0) + (a_{10} + da_1)x' + (a_{20} + da_2)y' \\ Y'' + V_{Y''} &= (b_{00} + db_0) - (a_{20} + da_2)x' + (a_{10} + da_1)y' \\ V_{X''} &= da_0 + da_1x' + da_2y' + l_{X''} \\ V_{Y''} &= db_0 - da_2x' + da_1y' + l_{Y''} \end{aligned} \quad (4)$$

إذ:

$$\begin{aligned} l_{X''} &= (a_{00} + a_{10}x' + a_{20}y') - X'' \\ l_{Y''} &= (b_{00} - a_{20}x' + a_{10}y') - Y'' \end{aligned}$$

وحلها يعطي المتغيرات da_j التي سبق أن أشرنا إليها ويعطي من ثمَّ علاقتي التحويل اللتين تسمحان بحساب الإحداثية محولةً إلى جملة الإحداثيات المستوية:

$$\begin{aligned} X'' &= f(x', y') \\ Y'' &= g(x', y') \end{aligned} \quad (5)$$

وهما العلاقتان المعطيتان بالعلاقتين (2).

إنَّ الهدف الرئيس من هذا التحويل الذي يسعى لنقل الإحداثيات من نظام محددٍ إلى نظام إحداثيات آخر، هو حذف الجزء النظامي بين النظامين (دوران وانسحاب نظام بالنسبة إلى النظام الآخر)، ويكون تطبيق التحويل فعالاً كلما اقتربت فروق إحداثيات النقاط المشتركة في النظامين من خلوها من الأخطاء العرضية، كما سيظهر عند تطبيق هذا التحويل على الإحداثيات المرشحة (x', y') المعتمدة في البحث [4].

من وجهة نظر نظرية المربعات الصغرى يقتضي الحل حساب أخطاء واختبارات إحصائية، كما يتطلب الحساب الخطأ على الإحداثيين (X'', Y'') جرى حسابهما بموجب النموذج الرياضي الذي أفضى إليه الحل.

2- حساب الأخطاء:

1-2- الخطأ المتوسط التربيع على واحدة الوزن

(Root mean square error of the unit weight)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T P V}{2n - 4}} \quad (6)$$

2-2- الخطأ على الأمثال a_i المعطى بالعلاقة:

$$m_{a_i} = m_0 \sqrt{Q_{a_i a_i}} \quad (7)$$

إذ:

$$Q_{a_i a_i} = N^{-1}, \quad N = A^T Q_{X'' Y''}^{-1} A \quad (8)$$

3- ارتباط الإحداثيين (X'', Y'') الناتجين عن التحويل**المقترح:**

يعرّف هذا الارتباط إحصائياً بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \text{Cov}^2(X'', Y'') &= \frac{Q_{X''X''}Q_{Y''Y''} - Q_{X''Y''}^2}{Q_{X''X''}Q_{Y''Y''}} \\ &= 1 - \frac{Q_{X''Y''}^2}{Q_{X''X''}Q_{Y''Y''}} \quad (17) \end{aligned}$$

وهو ما يعرف بقرينة الارتباط ρ^2 (Index of correlation) أو التغير المتلازم لكل من X'' و Y'' (covariance of X'' and Y'')

(Маркузе Ю. И, Антипов А. В, 2004) [6]. إنَّ المقدار $\rho^2 > 0$ وتتغير قيمته بين الصفر والواحد، أي $0 \leq \rho^2 \leq 1$ ، ويبدو ذلك جلياً إذا اعتمدنا الكسر المتضمن في العلاقة (17)، إذ قيمته موجبة لأنَّ $Q_{X''Y''}^2 > 0$ ، وكذلك كلٌّ من $Q_{X''X''}$ و $Q_{Y''Y''}$ موجب أيضاً.

لدينا حالتان:

– إذا كان الارتباط بين X'' و Y'' معدوماً كان $Q_{X''Y''}$ معدوماً أيضاً وكان $\rho^2 = 1$ ، وبعبارةٍ أخرى كان التابعان X'' و Y'' مستقلين.

إذا كان الارتباط بين X'' و Y'' موجوداً كانت قيمة الكسر في العلاقة (17) أصغر من الواحد، وكان $\rho^2 < 1$ ، وبعبارةٍ أخرى كان التابعان غير مستقلين. إنَّ قيمة ρ^2 تتوقف على درجة الارتباط بين X'' و Y''، ويكون $\rho^2 = 0$ عندما يكون الارتباط بين X'' و Y'' شديداً. يمكن التحقق من ذلك بتطبيق العلاقة (17) استناداً إلى عناصر المصفوفة (16).

تتطلب مسألة تمثيل مستويّاً على مستويٍّ آخر تمثيلاً مطابقاً حل مسألتين هما:

1-3- التشوه الخطي (Linear distortion)، ونرمز له بالرمز

(m):

يعرّف هذا التشوه بحساب النسبة الناتجة عن ارتسام π

على π' ، وهي:

وكذلك يكون حساب الأمثال المرافقة والمستطيلة في المصفوفة استناداً إلى الحساب الرمزي الذي طوّره تينسترا

وهو: $Q_{X''Y''} = Q_{X''} \times Q_{Y''}$

إذ حساب هذا الجداء:

$$(Q_{a_0} + x'Q_{a_1} + y'Q_{a_2}) \times (Q_{b_0} - x'Q_{a_2} + y'Q_{a_1})$$

يعطي العلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} Q_{X''Y''} &= Q_{a_0b_0} - x'^2 Q_{a_1a_2} + y'^2 Q_{a_1a_2} + x'Q_{b_0a_1} + y'Q_{b_0a_2} \\ &- x'Q_{a_0a_2} - x'y'Q_{a_2a_2} + y'Q_{a_0a_1} + x'y'Q_{a_1a_1} \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

يمكن حساب أمثال الوزن للنقاط المحولة حساباً شاملاً بواسطة المصفوفات، إذ قيم أمثال الوزن للإحداثيات (X'', Y'') التي نتجت عن تحويل هيلميرت، معطاة بالمصفوفة الآتية:

$$Q_{X''X''} = fQ_{aa}f^T \quad (14)$$

$$Q_{aa} = (A^T PA)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{x_1x_1} & \dots & \dots & \dots \\ Q_{x_2x_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_{x_3x_3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Q_{x_nx_n} \end{pmatrix}_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & 0 & x'_2 & y'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & x'_n & y'_n \end{pmatrix}_{n,4}$$

$$\times (Q_{aa})_{4,4} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \end{pmatrix}_{4,n} \quad (15)$$

إنَّ الحساب السابق بطريقة المصفوفات يأخذ بالحسبان حساب أمثال الوزن لكل من X'', Y'' بشكلٍ مستقلٍ ليعطي $Q_{X''X''}$ و $Q_{Y''Y''}$ بشكلٍ مماثل، سوى أنّه يمكن حسابهما معاً إذا اعتمدنا المصفوفة الأولى مرتّبة لكلِّ نقطة على النحو الآتي:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x'_1 & y'_1 \\ 0 & 1 & y'_1 & -x'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & x'_n & y'_n \\ 0 & 1 & y'_n & -x'_n \end{pmatrix}_{(2n,4)} \quad (16)$$

$$\frac{dS'^2}{dS^2} = \left(\frac{\partial X''}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y''}{\partial x'} \right)^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (22)$$

التي نتجت عن تطبيق المستوي π على المستوي π' نقطياً وبشكل مطابق، إذ النقطة P والنقطة P' الصورة معرفتان بالعديدين العقديين:

$$Z = X'' + iY'' \quad ; \quad z = x' + iy'$$

نشير هنا إلى أن x', y' هما إحداثيا النقطة المدروسة الناتجة عن الترشيح، وأن نسبة التشوه m تتعلق فقط بوضع النقطة في مستوي التحويل، ولا تتعلق بالاتجاه نظراً إلى التطابق في التحويل.

2-3- تقارب خطوط الطول (Convergence of Meridian):

نظراً إلى أن ملائمة نقاط من مستوي محدد مع نقاط من مستوي إحداثي آخر وله نظام إحداثي محدد أيضاً بواسطة كثير حدود تمر بدوران أحد المستويين بالنسبة إلى الآخر، ينتج عن ذلك تغيير في تقارب خطوط الطول هو c' (بيلاي، القرني، 2007) [3] ويحسب هذا التقارب بالعلاقة:

$$= -\frac{a_2}{a_1} \quad tg c' = -\frac{\frac{\partial Y''}{\partial x'}}{\frac{\partial X''}{\partial x'}} \quad (23)$$

وهي قيمة ثابتة للنقاط المحولة جميعها، يجب أن تضاف إلى قيمة زاوية تقارب الطول المعطاة بالارتسام، أي إن تقارب خطوط الطول للنقاط المحولة هو $\bar{c} = c + c'$ إذ c تقارب خطوط الطول المعطى بالارتسام الأساسي المعطى، و c' معطى بالعلاقة (23).

تمثل c' دوراناً في الشكل عند تطبيق المستوي π على المستوي π' تطبيقاً مطابقاً مرتبطاً بعلاقتي كوشي-ريمان ماراً بالساحة العقدية عند اشتقاق علاقات التطبيق، لذلك تبقى قيمة c' وإن بدت صغيرة، مهمة عند حساب زوايا المثلث الجيوديزي A, B, C على سطح الاهليلج الدوراني من الإحداثيات المستوية لرؤوس المثلث A'B'C' صورة ABC بالتطبيق المطابق، إذ يجري الحساب بدقة 0.0001° . يكون

$$m = \frac{dS'}{dS} \quad (dS' \in \pi'; dS \in \pi)$$

وتحسب هذه النسبة كما يأتي: إن طول العنصر الخطي في مستوي التحويل معرّف بالعلاقة: $dS'^2 = dZ \cdot d\bar{Z}$ إذ: $dZ = dX'' + idY''$ و $d\bar{Z} = dX'' - idY''$ ، فإذا أخذنا بالحسبان التابع التحليلي $Z = f(z)$

الذي يربط بين المستويين بواسطة التابعين الحقيقيين $X'' = f(x', y')$ $Y'' = g(x', y')$ اللذين هما مركبتا العدد العقدي Z في مستوي التحويل. إذاً يكون لدينا:

$$\begin{aligned} dX'' &= \frac{\partial X''}{\partial x'} dx' + \frac{\partial X''}{\partial y'} dy' \\ dY'' &= \frac{\partial Y''}{\partial x'} dx' + \frac{\partial Y''}{\partial y'} dy' \end{aligned} \quad (18)$$

ومنه نحصل على:

$$\begin{aligned} dS'^2 &= \left(\frac{\partial X''}{\partial x'} \right)^2 dx'^2 + \left(\frac{\partial X''}{\partial y'} \right)^2 dy'^2 + 2 \frac{\partial X''}{\partial x'} \cdot \frac{\partial X''}{\partial y'} dx' dy' + \\ &+ \left(\frac{\partial Y''}{\partial x'} \right)^2 dx'^2 + \left(\frac{\partial Y''}{\partial y'} \right)^2 dy'^2 + 2 \frac{\partial Y''}{\partial x'} \cdot \frac{\partial Y''}{\partial y'} dx' dy' \end{aligned} \quad (19)$$

ونظراً إلى كون التمثيل مطابقاً عندئذٍ ينعدم مجموع الجداءين في العلاقة السابقة. إذا أخذنا بالحسبان مطابقتي كوشي-ريمان المذكورتين سابقاً، وهما:

$$\frac{\partial X''}{\partial x'} = \frac{\partial Y''}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{\partial X''}{\partial y'} = -\frac{\partial Y''}{\partial x'}$$

ومن ثم يصبح العنصر الخطي في مستوي الارتسام من المستوي π' معطى بالعلاقة:

$$dS'^2 = \left[\left(\frac{\partial X''}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y''}{\partial x'} \right)^2 \right] dx'^2 + \left[\left(\frac{\partial X''}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y''}{\partial y'} \right)^2 \right] dy'^2 \quad (20)$$

واستناداً إلى مطابقتي كوشي-ريمان يصبح العنصر الخطي في مستوي الارتسام المطابق (Conformal Projection) معطى بالعلاقة:

$$dS'^2 = \left[\left(\frac{\partial X''}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y''}{\partial x'} \right)^2 \right] dS^2 \quad (21)$$

أي إن نسبة التشوه الخطي هي:

ومن ثمَّ استُخدمت ثماني عشرة نقطة، نقطة من أجل تعيين التصحيحات da_0, db_0, da_1, da_2 على القيم التقريبية مستخدمين طريقة المربعات الصغرى، كما هو مبين في العلاقة (4) وكانت النتائج هي الآتية:

$$da_0 = 1.332, db_0 = -1.342, da_1 = -2.186E^{-6}, da_2 = -2.57.E^{-6}$$

إذ الأمثال النهائية في معادلتَي المستويين (3) هي الآتية:

$$a_0 = a_{00} + da_0 = 0.169 \text{ m}; b_0 = b_{00} + db_0 = 1.474$$

$$a_1 = a_{10} + da_1 = 0.999997814; a_2 = a_{20} + da_2 = 2.99.E^{-7}$$

أي إن دوران (Rotation) مستوي نظام الـ GPS بالنسبة إلى المستوي الإحداثي في التطبيق المقترح المعطى بالعلاقة:

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2.99E^{-7}}{0.999997814} \Rightarrow \varepsilon = 1.9034E^{-5} \text{ gr.} = 0^{\circ}.1903$$

بعبارة أخرى يكون تأثير هذا الدوران في ضلع طوله 40km في شبكة مثلثات من الدرجة الأولى بنسبة أحد طرفيه هو:

$$q = 40 \text{ km} \times \frac{0.1903}{\rho^{\text{cc}}} = \frac{0.1903}{636620} = 0.019 \text{ m}$$

2-4- حساب الأخطاء على أمثال المستوي الذي يتلاءم

أفضل ما يمكن مع ثماني عشرة نقطة:

2-4-1 حساب الخطأ المتوسط التربيع على واحدة الوزن (Root mean square error of the unit weight) المعطى

بالعلاقة (6):

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T PV}{2n-4}} = \pm \sqrt{\frac{0.28}{2 \times 18 - 4}} = \pm 0.0935$$

2-4-2 حساب الأخطاء على أمثال التحويل المحسوب

والمعطى بالعلاقة (7)

لحساب الأخطاء على أمثال التحويل يتطلب الأمر حساب المصفوفة $Q = (A^T PA)^{-1}$ ، إذ هذه المصفوفة (مصفوفة أمثال الوزن للتحويل) معطاة بالمصفوفة الآتية:

$$Q = \begin{pmatrix} 9.415 & 7.737 \times 10^{-14} & -4.127 \times 10^{-6} & -1.527 \times 10^{-5} \\ 7.658 \times 10^{-14} & 9.415 & -1.527 \times 10^{-5} & 4.127 \times 10^{-6} \\ -4.127 \times 10^{-6} & -1.527 \times 10^{-5} & 2.672 \times 10^{-11} & 0 \\ -1.527 \times 10^{-5} & 4.127 \times 10^{-6} & 0 & 2.672 \times 10^{-11} \end{pmatrix}$$

واستناداً إلى مصفوفة أمثال الوزن Q الناتجة عن حساب أمثال التحويل (a_0, b_0, a_1, a_2) وحساب الخطأ المتوسط

هذا الحساب ممكناً إذا حسبنا تصحيحات الوتر δ في المستوي، وكذلك تقارب خطوط الطول (c) المعطى بواسطة علاقات الارتسام، يضاف إليه المقدار 'c' المعطى بالعلاقة (23).

لكي ندلل على فعالية معالجة قياسات نظام الـ GPS بملاصمتها مع إحداثيات نقاط الشبكتين من الدرجة الأولى والثانية يتطلب الأمر اتباع الخطوتين الآتيتين:

1- ترشيح D_x, D_y لننتقل بواسطة هذا الترشيح إلى إحداثيات جديدة x', y' .

2- تطبيق التحويل الجديد على الإحداثيات المرشحة (x', y') لننتقل إلى الإحداثيات النهائية (X'', Y'') الناتجة عن التحويل لتقارن إحداثيات التحويل (Transformation of Coordinates) بمثيلاتها في النظام المستوي (Land System).

4 - تطبيق عددي:

نعطي فيما يأتي مثلاً يتناول إحداثيات مرشحة (x', y') لنقاط من الشبكتين الأولى والثانية، وعددها 64 نقطة؛ وذلك بتطبيق التحويل الذي اشتقاقه ومعطى بالعلاقة (3)، إذ تلك المعطيات مثبتة في الجدول (1) الذي يظهر الإحداثيات المستوية فضلاً عن الإحداثيات الناتجة عن الترشيح، انظر توزع النقاط المشار إليها في البحث [4]، وهي جملة من النقاط الجيوديزية من الدرجة الأولى والثانية في منطقة جبال الألب السويسرية التي تمثل الحدود المكانية المعتمدة في الدراسة، وتغطي هذه النقاط مساحة قدرها ما يزيد عن 11000 Km^2 .

متبعين في الحساب الخطوات الآتية:

1.4- حساب أمثال التحويل المقترح بطريقة المربعات الصغرى:

حُسيبت أمثال التحويل $a_{00}, b_{00}, a_{10}, a_{20}$ التقريبية مستخدمين نقطتين من أجل تعيين هذه القيم، وكانت النتائج هي الآتية:

$$a_{00} = -1.163; b_{00} = 2.816; a_{10} = 1.0; a_{20} = 2.869E^{-6}$$

التحويل تطبيقاً مباشراً على القياسات المأخوذة باستخدام نظام الـ GPS. إذ أنّ الجدول (1) يُظهر مقارنة الإحداثيات المستوية بالإحداثيات المرشحة، ويُظهر أيضاً الإحداثيات الناتجة عن التحويل لقيم الإحداثيات المرشحة.

التربيع على واحدة الوزن فقد حُسِبَتِ الأخطاء على أمثال التحويل، وكانت النتائج كالآتي:

$$m_{a_0} = m_0 \sqrt{Q_{a_0 a_0}} = 0.287 \quad ; m_{b_0} = m_0 \sqrt{Q_{b_0 b_0}} = 0.287$$

$$m_{a_1} = m_0 \sqrt{Q_{a_1 a_1}} = 4.833E^{-7} \quad ; m_{b_1} = m_0 \sqrt{Q_{b_1 b_1}} = 4.833E^{-7}$$

يبين الجدولان (1, 2) إحداثيات النقاط المستخدمة في البحث، والنتائج التي تمّ الحصول عليها بعد الترشيح وبعد تطبيق التحويل المقترح على الإحداثيات الناتجة عن الترشيح، وعن

(الجدول 1)

تسلسل	N	الإحداثيات المستوية القديمة		الإحداثيات الناتجة عن الترشيح		الإحداثيات الناتجة عن التحويل المقترح للقيم المرشحة	
		X (m)	Y (m)	x'(m)	y'(m)	X'(m)	Y'(m)
1	14	123065.46	557506.31	123065.508	557506.04	123065.575	557506.259
2	17	169450.1	580516.4	169450.034	580516.152	169450.006	580516.306
3	23	140945.79	634998.65	140945.839	634998.627	140945.89	634998.671
4	30	154053.57	528477.12	154053.579	528476.862	154053.569	528477.135
5	41	179183.22	549941.36	179183.145	549941.13	179183.087	549941.349
6	86	179867.93	592023.9	179867.944	592023.889	179867.896	592024.015
7	87	143282.93	581273.26	143283.079	581273.054	143283.108	581273.215
8	94	121009.34	581210.44	121009.398	581210.112	121009.476	581210.279
9	133	161011.24	513517.77	161011.271	513517.471	161011.242	513517.774
10	137	163499.35	627184.79	163499.346	627184.872	163499.345	627184.926
11	140	162157.63	554943.11	162157.606	554942.858	162157.586	554943.07
12	142	133070.96	497356.4	133070.839	497356.032	133070.866	497356.379
13	148	187673.5	625203.2	187673.608	625203.382	187673.553	625203.433
14	151	160187.86	599336.23	160187.877	599336.091	160187.875	599336.207
15	204	118419.21	624554.7	118419.058	624554.528	118419.155	624554.602
16	210	194044.95	563533.6	194044.925	563533.379	194044.839	563533.563
17	216	151315.05	546433.28	151315.09	546433.077	151315.092	546433.312
18	221	138610.44	526816.76	138610.355	526816.5	138610.378	526816.781
19	9	142943.64	499140.46	142943.57	499140.088	142943.576	499140.428
20	13	121443.98	615778.34	121443.933	615778.106	121444.021	615778.197
21	44	148337.66	514625.64	148337.637	514625.339	148337.636	514625.644
22	63	191463.24	585647.94	191463.262	585647.853	191463.188	585647.99
23	74	150455.94	593732.56	150455.95	593732.327	150455.968	593732.458
24	78	171442.92	570122.02	171442.86	570121.767	171442.825	570121.943
25	112	180274.78	567484.13	180274.628	567483.89	180274.572	567484.07
26	127	134319.59	513306	134319.504	513305.682	134319.532	513306.127
27	131	155365.33	567670.02	155365.324	567669.705	155365.323	567669.892
28	152	166132.6	616367.29	166132.535	616367.32	166132.525	616367.397
29	157	130895.39	583277.93	130895.533	583277.685	130895.59	583277.845
30	159	150733.21	537784.64	150733.19	537784.415	150733.19	537784.669
31	169	147998.65	559341.81	147998.636	559341.648	147998.649	559341.855
32	214	180593.68	525731.17	180593.83	525730.923	180593.762	525731.194
33	223	135725.06	566399.47	135725.217	566399.255	135725.258	566399.45
34	233	139787.68	607297.94	139787.743	607297.681	139787.788	607297.786
35	239	153382.66	521209.87	153382.685	521209.591	153382.674	521209.88
36	240	191792.9	602062.28	191792.891	602062.27	191792.821	602062.371
37	1	154516.67	621081.71	154516.611	621081.693	154516.722	621081.763
38	3	141982.09	618433.69	141982.125	618433.526	141982.236	618433.606
39	15	189903.5	606651.21	189903.511	606651.25	189903.469	606651.341
40	29	178114.32	627709.88	178114.309	627710.05	178114.435	627710.098
41	38	170156.69	521625.8	170157.353	521625.541	170156.731	521625.824
42	40	130675.39	570936.61	130675.803	570936.434	130675.59	570936.621

43	42	189356.67	531332.83	189357.126	531332.633	189356.546	531332.889
44	51	161932.85	528770.62	161933.433	528770.371	161932.874	528770.64
45	53	180624.03	542197.24	180624.58	542197.054	180624.09	542197.289
46	57	133754.43	545559	133754.806	545558.799	133754.408	545559.04
47	59	167318.2	635849	167318.042	635849.183	167318.241	635849.217
48	61	142439.74	497073.77	142440.423	497073.392	142439.666	497073.736
49	64	137634.23	505528.68	137634.866	505528.332	137634.176	505528.66
50	70	184059.67	577811.97	184059.859	577811.804	184059.618	577811.96
51	75	175706.29	628128.4	175706.172	628128.596	175706.304	628128.645
52	84	151216.56	629827.51	151216.44	629827.506	151216.619	629827.558
53	85	151031.04	606192.12	151031.119	606191.966	151031.129	606192.07
54	88	177672.31	601672.56	177672.358	601672.507	177672.298	601672.612
55	95	126995.88	507894.44	126996.453	507894.117	126995.795	507894.443
56	120	117387.28	603847.03	117387.296	603846.714	117387.339	603846.833
57	129	179871.38	562935.97	179871.522	562935.772	179871.182	562935.962
58	138	167713.22	531066.47	167713.817	531066.244	167713.267	531066.507
59	141	169047.61	548674.53	169048.116	548674.371	169047.689	548674.595
60	150	153187.69	506627.12	153188.38	506626.774	153187.676	506627.095
61	155	138481.59	508038.44	138482.207	508038.109	138481.534	508038.431
62	156	171949.63	598475.56	171949.724	598475.464	171949.649	598475.579
63	181	142379.4	564444.08	142379.705	564443.95	142379.429	564444.148
64	229	120465.83	516413.44	120466.273	516413.11	120465.686	516413.411

كما يظهر الجدول (2) مقارنة الإحداثيات المستوية مع ويظهر أيضاً الإحداثيات الناتجة عن التحويل المباشر لإحداثيات الـ GPS. للقياسات.

الجدول (2)

تسلسل	N	الإحداثيات المستوية القديمة		الإحداثيات الناتجة عن القياسات بنظام GPS		الإحداثيات الناتجة عن التحويل لقياسات GPS مباشرة	
		X(m) Land	Y(m) Land	X _{GPS} (m)	Y _{GPS} (m)	X' _{GPS} (m)	Y' _{GPS} (m)
1	14	123065.46	557506.31	123065.8441	557505.702	123065.553	557506.064
2	17	169450.1	580516.4	169450.1672	580516.069	169450.013	580516.142
3	23	140945.79	634998.65	140945.6274	634998.412	140945.813	634998.656
4	30	154053.57	528477.12	154054.0837	528476.679	154053.61	528476.852
5	41	179183.22	549941.36	179183.4783	549941.088	179183.135	549941.104
6	86	179867.93	592023.9	179867.9882	592023.865	179867.905	592023.873
7	87	143282.93	581273.26	143283.2323	581272.833	143283.086	581273.067
8	94	121009.34	581210.44	121009.5736	581209.771	121009.429	581210.143
9	133	161011.24	513517.77	161011.8719	513517.319	161011.305	513517.45
10	137	163499.35	627184.79	163499.1652	627184.775	163499.3	627184.88
11	140	162157.63	554943.11	162157.9214	554942.727	162157.61	554942.847
12	142	133070.96	497356.4	133071.5773	497355.725	133070.914	497356.03
13	148	187673.5	625203.2	187673.4175	625203.412	187673.538	625203.369
14	151	160187.86	599336.23	160187.8906	599335.966	160187.854	599336.095
15	204	118419.21	624554.7	118418.939	624554.19	118419.062	624554.574
16	210	194044.95	563533.6	194045.1513	563533.421	194044.89	563533.344
17	216	151315.05	546433.28	151315.4749	546432.886	151315.112	546433.074
18	221	138610.44	526816.76	138610.886	526816.233	138610.404	526816.502
19	9	142943.64	499140.46	142944.2868	499139.834	142943.633	499140.079
20	13	121443.98	615778.34	121443.8715	615777.78	121443.94	615778.146
21	44	148337.66	514625.64	148338.2421	514625.12	148337.684	514625.329
22	63	191463.24	585647.94	191463.3394	585647.89	191463.215	585647.826
23	74	150455.94	593732.56	150456.0113	593732.147	150455.941	593732.337
24	78	171442.92	570122.02	171443.0629	570121.691	171442.845	570121.752
25	112	180274.78	567484.13	180274.8398	567483.86	180274.605	567483.868
26	127	134319.59	513306	134320.1314	513305.388	134319.566	513305.684
27	131	155365.33	567670.02	155365.5593	567669.542	155365.328	567669.704
28	152	166132.6	616367.29	166132.4258	616367.232	166132.494	616367.322
29	157	130895.39	583277.93	130895.6848	583277.398	130895.552	583277.708
30	159	150733.21	537784.64	150733.634	537784.217	150733.218	537784.41

31	169	147998.65	559341.81	147998.9358	559341.443	147998.653	559341.651
32	214	180593.68	525731.17	180594.3281	525730.879	180593.835	525730.889
33	223	135725.06	566399.47	135725.4794	566398.987	135725.242	566399.27
34	233	139787.68	607297.94	139787.7222	607297.45	139787.736	607297.704
35	239	153382.66	521209.87	153383.24	521209.401	153382.722	521209.579
36	240	191792.9	602062.28	191792.8558	602062.314	191792.833	602062.247
37	1	154516.67	621081.71	154516.5756	621081.545	154516.674	621081.707
38	3	141982.09	618433.69	141982.0933	618433.311	141982.176	618433.55
39	15	189903.5	606651.21	189903.4679	606651.286	189903.474	606651.23
40	29	178114.32	627709.88	178114.2691	627710.03	178114.406	627710.045
41	38	170156.69	521625.8	170157.3143	521625.441	170156.797	521625.515
42	40	130675.39	570936.61	130675.773	570936.141	130675.564	570936.455
43	42	189356.67	531332.83	189357.0829	531332.638	189356.624	531332.593
44	51	161932.85	528770.62	161933.3964	528770.229	161932.924	528770.353
45	53	180624.03	542197.24	180624.5392	542197.017	180624.148	542197.025
46	57	133754.43	545559	133754.7753	545558.513	133754.409	545558.81
47	59	167318.2	635849	167318.0037	635849.109	167318.192	635849.19
48	61	142439.74	497073.77	142440.3909	497073.135	142439.725	497073.382
49	64	137634.23	505528.68	137634.8348	505528.053	137634.221	505528.329
50	70	184059.67	577811.97	184059.8169	577811.798	184059.645	577811.781
51	75	175706.29	628128.4	175706.1325	628128.564	175706.272	628128.594
52	84	151216.56	629827.51	151216.4058	629827.344	151216.558	629827.525
53	85	151031.04	606192.12	151031.0843	606191.795	151031.091	606191.979
54	88	177672.31	601672.56	177672.3182	601672.475	177672.294	601672.496
55	95	126995.88	507894.44	126996.4239	507893.782	126995.826	507894.124
56	120	117387.28	603847.03	117387.2698	603846.362	117387.265	603846.755
57	129	179871.38	562935.97	179871.4817	562935.738	179871.218	562935.749
58	138	167713.22	531066.47	167713.7793	531066.134	167713.32	531066.223
59	141	169047.61	548674.53	169048.0776	548674.274	169047.727	548674.353
60	150	153187.69	506627.12	153188.3457	506626.578	153187.737	506626.758
61	155	138481.59	508038.44	138482.1752	508037.835	138481.577	508038.106
62	156	171949.63	598475.56	171949.6854	598475.401	171949.642	598475.457
63	181	142379.4	564444.08	142379.6725	564443.718	142379.422	564443.959
64	229	120465.83	516413.44	120466.246	516412.743	120465.701	516413.124

ولكي نظهر فعالية هذا التحويل على الإحداثيات المرشحة مسبقاً [4]، نعطي فيما يأتي جدول مقارنة (3) تظهر الفروق الآتية:

- 1- الفروق الناتجة عن مقارنة إحداثيات نقاط الشبكة القديمة بإحداثيات النقاط ذاتها التي أخذت من قياسات نظام الـ GPS، وهي قياسات حديثة. نجد هذه الفروق في العمود رقم (1) من الجدول المرفق (3).
- 2- الفروق الناتجة عن مقارنة الإحداثيات المستوية بإحداثيات النقاط ذاتها بعد الترشيح. نجد هذه الفروقات في العمود رقم (2) من الجدول المرفق (3).
- 3- الفروق الناتجة عن مقارنة الإحداثيات المستوية بإحداثيات النقاط ذاتها بتطبيق التحويل المقترح على إحداثيات النقاط التي نتجت عن قياسات نظام الـ GPS، دون أي ترشيح، بتحويلها إلى النظام المستوي المتداول. نجد هذه الفروق في العمود رقم (3) من الجدول المرفق (3).
- 4- الفروق الناتجة عن مقارنة تحويل الإحداثيات (x',y') المرشحة بواسطة التحويل المقترح بالإحداثيات المستوية المتداولة. نجد هذه الفروق في العمود رقم (4) من الجدول المرفق (3).

الجدول (3) يبين مقارنة الفروقات المختلفة

جدول مقارنة الفروق المختلفة									
تسلسل	N	(1)		(2)		(3)		(4)	
		D _x (m)	D _y (m)	D _x (m)	D _y (m)	D _x GPS	D _y GPS	D _x (m)	D _y (m)
1	14	0.3841	-0.608	0.336	-0.3383	-0.0925	0.2464	-0.1148	0.0512
2	17	0.0672	-0.3311	0.1335	-0.0829	0.0866	0.2579	0.0941	0.0939
3	23	-0.1626	-0.238	-0.212	-0.2149	-0.0225	-0.0061	-0.1002	-0.0207
4	30	0.5137	-0.4414	0.5048	-0.1838	-0.0401	0.2685	0.0009	-0.0151
5	41	0.2583	-0.2719	0.3335	-0.0422	0.0851	0.2561	0.1335	0.0114
6	86	0.0582	-0.0346	0.0446	-0.0232	0.0255	0.0268	0.0336	-0.1147
7	87	0.3023	-0.4275	0.1537	-0.222	-0.1556	0.1929	-0.1782	0.045
8	94	0.2336	-0.6691	0.1757	-0.3406	0.1451	-0.3721	-0.1362	0.1612
9	133	0.6319	-0.4511	0.6006	-0.1522	-0.065	0.3198	-0.0019	-0.0044
10	137	-0.1848	-0.0154	-0.18	-0.0976	0.0499	-0.0902	0.0054	-0.1363
11	140	0.2914	-0.3833	0.3157	-0.131	0.0196	0.2628	0.0439	0.0399
12	142	0.6173	-0.6749	0.7383	-0.3068	0.0465	0.3696	0.0942	0.0211
13	148	-0.0825	0.2124	-0.19	0.03038	-0.0379	-0.1690	-0.0534	-0.2332
14	151	0.0306	-0.264	0.0136	-0.1254	0.0062	0.1354	-0.015	0.0226
15	204	-0.271	-0.5105	-0.119	-0.3387	0.14828	0.1264	0.0554	0.0985
16	210	0.2013	-0.1789	0.226	0.04191	0.0596	0.2561	0.1114	0.0367
17	216	0.4249	-0.3944	0.3845	-0.1919	-0.0624	0.2062	-0.042	-0.0318
18	221	0.446	-0.5266	0.5312	-0.2666	0.0365	0.2582	0.0617	-0.0209
19	9	0.6468	-0.6257	0.7165	-0.2536	0.0069	0.3816	0.0639	0.032
20	13	-0.1085	-0.5602	-0.061	-0.3257	0.0402	0.1939	-0.0406	0.1429
21	44	0.5821	-0.5205	0.6052	-0.2193	-0.0235	0.3111	0.0245	-0.0035
22	63	0.0994	-0.0505	0.0771	0.03619	0.0247	0.1137	0.0521	-0.0498
23	74	0.0713	-0.4127	0.0614	-0.1793	-0.0008	0.2235	-0.0275	0.1023
24	78	0.1429	-0.3294	0.2028	-0.0761	0.0752	0.2676	0.0952	0.0768
25	112	0.0598	-0.2699	0.2123	-0.03	0.1754	0.2624	0.2079	0.0603
26	127	0.5414	-0.6122	0.652	-0.4269	0.0241	0.3161	0.0576	-0.1265
27	131	0.2293	-0.4776	0.2351	-0.1626	0.0025	0.31636	0.0067	0.1284
28	152	-0.1742	-0.0579	-0.109	-0.0875	0.1063	-0.0324	0.0753	-0.1065
29	157	0.2948	-0.5325	0.1519	-0.2872	-0.1616	0.2216	-0.2002	0.0855
30	159	0.424	-0.4227	0.4443	-0.1981	-0.0081	0.23015	0.0200	-0.0287
31	169	0.2858	-0.367	0.2993	-0.2048	-0.0033	0.1595	0.0008	-0.0448
32	214	0.6481	-0.2908	0.4979	-0.0435	-0.1551	0.2815	-0.0816	-0.0235
33	223	0.4194	-0.4826	0.2629	-0.2676	-0.1815	0.2	-0.1982	0.0197
34	233	0.0422	-0.4897	-0.021	-0.2311	-0.0564	0.2359	-0.1084	0.1539
35	239	0.58	-0.4686	0.5553	-0.19	-0.0616	0.2909	-0.0142	-0.0102
36	240	-0.0442	0.0342	-0.036	0.04391	0.067	0.03256	0.0787	-0.0908
37	1	-0.0944	-0.1651	-0.13	-0.1477	-0.0036	0.00348	-0.0523	-0.0527
38	3	0.0033	-0.3794	-0.1	-0.2154	-0.0861	0.1402	-0.1464	0.0843
39	15	-0.0321	0.0756	-0.065	0.03551	0.0264	-0.0201	0.0315	-0.1312
40	29	-0.0509	0.15	-0.198	-0.0196	-0.0859	-0.1653	-0.1145	-0.2182
41	38	-0.3757	-0.3593	0.5362	-0.1005	-0.1069	0.2852	-0.0411	-0.024
42	40	0.383	-0.4686	0.2367	-0.2929	-0.1736	0.1552	-0.2004	-0.0112
43	42	0.4129	-0.1921	0.4511	0.00524	0.046	0.2374	0.1243	-0.0586
44	51	0.5464	-0.3911	0.4952	-0.1417	-0.074	0.2669	-0.0243	-0.0203
45	53	0.5092	-0.223	0.3851	-0.0373	-0.118	0.2154	-0.0604	-0.0491
46	57	0.3453	-0.4868	0.4075	-0.2857	0.0210	0.19014	0.0225	-0.0403
47	59	-0.1963	0.1091	-0.243	-0.0742	0.0083	-0.1904	-0.0405	-0.2173
48	61	0.6509	-0.6355	0.7312	-0.2571	0.0155	0.3881	0.0741	0.0336
49	64	0.6048	-0.6274	0.6779	-0.2796	0.009	0.3511	0.0538	0.02
50	70	0.1469	-0.1725	0.1379	-0.0061	0.0249	0.1893	0.0516	0.0105
51	75	-0.1575	0.1638	-0.199	-0.0323	0.0179	-0.194	-0.0138	-0.2445
52	84	-0.1542	-0.166	-0.187	-0.1621	0.0019	-0.0152	-0.0591	-0.0481
53	85	0.0443	-0.3253	-0.024	-0.1717	-0.0507	0.1408	-0.0889	0.0499
54	88	0.0082	-0.0849	-0.019	-0.0314	0.0157	0.0647	0.0120	-0.0521
55	95	0.5439	-0.6582	0.672	-0.3354	0.0543	0.3164	0.0849	-0.003
56	120	-0.0102	-0.6677	0.0242	-0.3517	0.0152	0.27531	-0.0585	0.1971
57	129	0.1017	-0.2317	0.2438	-0.0338	0.1616	0.2213	0.1979	0.0083
58	138	0.5593	-0.3358	0.4739	-0.1101	-0.1004	0.2475	-0.0466	-0.0372
59	141	0.4676	-0.256	0.352	-0.0966	-0.1173	0.1775	-0.0791	-0.0647
60	150	0.6557	-0.5424	0.6553	-0.1963	-0.0473	0.3622	0.0140	0.0254
61	155	0.5852	-0.6051	0.6599	-0.2741	0.0132	0.3342	0.0565	0.009
62	156	0.0554	-0.1588	0.0081	-0.0631	-0.0123	0.1027	-0.0194	-0.0186
63	181	0.2725	-0.3625	0.2698	-0.2329	-0.022	0.1208	-0.0292	-0.068
64	229	0.416	-0.6972	0.62	-0.367	-0.1290	0.3159	0.1439	0.0294
	Σ	14.7415	-21.8385	15.41	-10.364	-0.3344	11.0682	-0.2031	-0.5693

$$m_{x''} = m_0 \sqrt{Q_{xx}} \quad ; m_{y''} = m_0 \sqrt{Q_{yy}}$$

نعطي فيما يأتي جدولاً (4) يظهر الحسابات لنقاط من الشبكة وعددها تسع وعشرون نقطة.

$$m_0 = \pm 0.0935 \text{ وحدة الوزن:}$$

5. الحساب الشامل للخطأ بين على "X" و "Y" الناتجين

عن التحويل المقترح بعد ترشيح الإحداثيات:

نظراً إلى أننا نسعى لملاءمة إحداثيات قياسات نظام الـ GPS مع الإحداثيات المستوية، وهي خطوة تبررها أعمال المساحة المستوية المتراكمة خلال الزمن، يكون من المنطقي أن نحسب خطأ واحداً للنقاط المحولة جميعها بعد الترشيح بواسطة لتحويل المقترح، معتمدين من أجل هذا الحساب حساب الخطأ على قياسات مضاعفة إذا اعتمدنا الإحداثيات المستوية أساساً للمقارنة. يجري هذا الحساب بواسطة العلاقة الآتية:

$$m_{rx} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{0.50226}{128}} = \pm 0.062m$$

إذ d تمثل الفرق بين X المستوية و "X" الناتجة عن التحويل، وكذلك الأمر بالنسبة إلى "Y":

$$m_{ry} = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{0.502277}{128}} = \pm 0.064m$$

وهو أمرٌ يؤكد فعالية الطريقتين المقترحتين في بحثنا: الأول: وهو حساب الإحداثيات المرشحة 'x,y' والثاني هو معالجة الإحداثيات المرشحة بالتحويل.

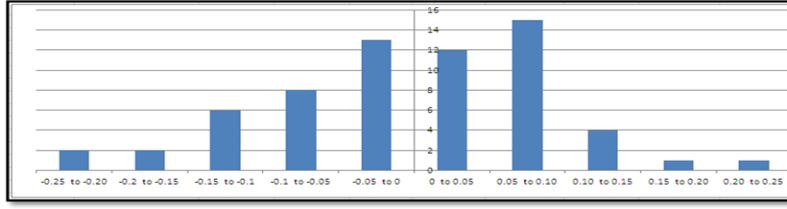
نعطي فيما يأتي المخططين التكراريين (Histogram) (المخططان 1,2) لفروق الإحداثيات ($D_{x''}, D_{y''}$) بين الإحداثيات المحولة والإحداثيات المستوية لندلّل على اقترابنا من التوزيع النظامي (Normal distribution) (Markuze, 2005) [5].

(4) الجدول

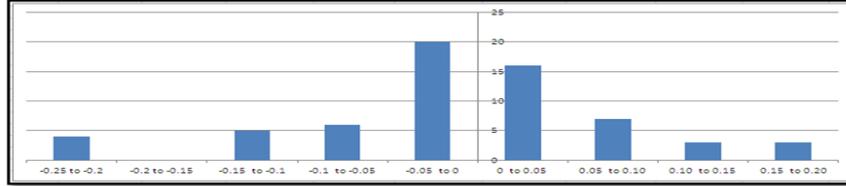
تسلسل	N	$Q_{x''x''}$	$Q_{y''y''}$	$M_{x''}$	$m_{y''}$
1	14	0.083	0.083	0.027	0.027
2	17	0.059	0.059	0.023	0.023
3	23	0.146	0.146	0.036	0.036
4	30	0.1	0.1	0.029	0.029
5	41	0.08	0.08	0.026	0.026
6	86	0.08	0.08	0.026	0.026
7	87	0.057	0.057	0.022	0.022
8	94	0.083	0.083	0.027	0.027
9	133	0.142	0.142	0.035	0.035
10	137	0.136	0.136	0.034	0.034
11	140	0.06	0.06	0.023	0.023
12	142	0.12	0.12	0.032	0.032
13	148	0.158	0.158	0.037	0.037
14	151	0.073	0.073	0.025	0.025
15	204	0.161	0.161	0.038	0.038
16	210	0.095	0.095	0.029	0.029
17	216	0.068	0.068	0.024	0.024
18	221	0.111	0.111	0.032	0.032
19	9	0.146	0.146	0.036	0.036
20	13	0.133	0.133	0.034	0.034
21	44	0.138	0.138	0.035	0.035
22	63	0.093	0.093	0.028	0.028
23	74	0.065	0.065	0.024	0.024
24	78	0.059	0.059	0.023	0.023
25	112	0.069	0.069	0.025	0.025
26	127	0.052	0.052	0.021	0.021
27	131	0.051	0.015	0.021	0.011
28	152	0.109	0.109	0.031	0.031
29	157	0.07	0.07	0.025	0.025

من فحص نتائج العمودين (3, 4) من الجدول (3) ومقارنتها، يبدو بوضوح أنّ تطبيق التحويل المقترح على الإحداثيات المرشحة في العمود (4) أعطى نتائج أفضل من تطبيق هذا التحويل مباشرة على قياسات الـ GPS. والسبب في ذلك يعود إلى توافر الجانب النظامي في المركبة D_x بتأثير الحركات البطيئة Epeirogenesis (انظر البحث (4)) الذي حذف بهذا التحويل.

3.4- حساب الأخطاء على إحداثيات النقاط المستخدمة في تعيين المستوي وعددها 64 نقطة مطبقين:
1-3-4 حساب أمثال الوزن لكل من "X" و "Y" مستخدمين المصفوفة (16)، ويكون الخطأ على إحداثيات النقاط المحولة بواسطة التحويل المقترح (3) معطى بالعلاقة:



المخطط (1) يظهر الفروق (Dx'') الناتجة عن مقارنة تحويل الإحداثيات المستوية بالإحداثيات X'', Y'' الناتجة عن تحويل الإحداثيات المرشحة x', y' بعد تحويلها بالتحويل المقترح.



المخطط (2) يظهر الفروق (Dy'') الناتجة عن مقارنة تحويل الإحداثيات المستوية بالإحداثيات X'', Y'' الناتجة عن تحويل الإحداثيات المرشحة x', y' بعد تحويلها بالتحويل المقترح.

وبعبارة أخرى يطرأ على تقارب خطوط الطول، نتيجة للتحويل، تغيير ثابت يجب أن يضاف إلى تقارب خطوط الطول المتعلق بطبيعة الارتسام. أي يصبح لدينا التقارب

$$\bar{c} = c + c' = c + 0^{cc}.1903$$

3.5- ارتباط X'' و Y'' :

إنَّ الارتباط بين X'' , Y'' يكاد يكون معدوماً لأنَّ الكسر الوارد في العلاقة (17) يبقى معدوماً، كما تظهر ذلك عناصر مصفوفة الأمثال المرافقة لكل من التابعين:

$$X'' = f(a_0, b_0, a_1, a_2)$$

$$Y'' = g(a_0, b_0, a_1, a_2)$$

فإذا أخذنا مثلاً النقطة (14)، إذ:

$$Q_{X''Y''} = 7.715E^{-14}; Q_{X''X''} = Q_{Y''Y''} = 0.08258$$

وحسبنا هذا الكسر ووجدنا أن $\rho^2 = 1 - 0$ ، وهو ما يشير إلى استقلال كلٍّ من التابعين f, g ، إنَّ السبب هو عدم ظهور كلٍّ من a_0, b_0 إلا بشكلٍ مستقلٍ في العلاقتين (3)، وهما الحدان المهيمنان في المصفوفة Q الناتجة عن تعيين تابعي التحويل $Y'' = g(x', y')$ ، $X'' = f(x', y')$ بطريقة المربعات الصغرى إذ:

$$.Q_{a_0a_0} = 9.415; \quad Q_{b_0b_0} = 9.415$$

ونؤكد هنا أنَّ هذا التحويل المطبق للانتقال من نظام إحداثيات الـ GPS إلى النظام المستوي (Plane system) يتناول تحويلاً بين

1.5- حساب التشوه الخطي (Linear distortion):

نعلم أنَّ: $m = \frac{ds'}{ds}$ (الصيفي، رضوان، 2011) [1] ومن ثمَّ

فإنَّ:

$$m^2 = a_1^2 + a_2^2 = (0.999999781)^2 + (2.99.E^{-7})^2 \approx 1$$

ونتيجة تشير إلى عدم تغير المقياس في هذا التحويل.

2.5- حساب تغير تقارب خطوط الطول:

أما فيما يتعلق بهذا التغير الناتج عن تحويل هيلمرت، فهو تغير متوقع يطرأ على هذا التقارب الناتج عن الارتسام الأساس نتيجة للدوران الذي يولِّده هذا التحويل، وهو معطى بالعلاقة (23) إذ:

$$\frac{\partial Y''}{\partial x'} = -a_2; \quad \frac{\partial X''}{\partial x'} = a_1$$

إذاً يكون التغير c' الطارئ على تقارب خطوط الطول، معطى بقيمة ثابتة لا تتعلق بموقع النقطة (x', y') المحوِّلة. أي يكون:

$$tgc' = -\frac{\frac{\partial Y''}{\partial x'}}{\frac{\partial X''}{\partial x'}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2.99.E^{-7}}{0.999999781}$$

$$\Rightarrow c' = 1.903.E^{-5} grad = 0^{cc}.1903$$

أي إنَّ التغير c' الطارئ على تقارب خطوط الطول المعطى بالارتسام هو دوران مستوي التحويل بالنسبة إلى مستوي الارتسام.

• تطبيق التحويل المقترح على الإحداثيات المرشحة لنتهي إلى إحداثيات GPS معلّنة (محوّلة "X",Y") تقترب كثيراً من الإحداثيات المستوية القديمة، وهو ما نسعى إليه.

6- يُظهِرُ تفحص نتائج العمود رقم (4) من الجدول رقم (3) أنّ الفروق بين النظامين أصبحت بحدود 15 cm وسطياً. فإذا أخذنا بالحسبان أنّ الأخطاء المتوافرة في حساب الشبكات القديمة هي 30cm على كلٍّ من X,Y، تبقى الفروق الواردة في العمود (4) من الجدول (3) أقلّ من هذه الأخطاء، أي إنّ معالجتنا لقياسات الـ GPS باتت طريقة الترشيح أولاً، ومن ثمّ تطبيق التحويل المقترح على القيم المرشحة فعّاله، ونوصي باتتباع هذه الطريقة، ونؤكد هنا أنّ معالجتنا على هذا النحو تعطي توزيعين للفروق $D_{X'}$ ، $D_{Y'}$ يقتربان من التوزيع النظامي.

7- إنّ سبب اقتراب فروق الإحداثيات من التوزيع النظامي (المخطط 2،1) يعود إلى أنّ طريقة الترشيح لم تحذف كلياً ما تبقى من الأخطاء النظامية المتوافرة في الإحداثيات، في حين أنّ هذا التحويل المقترح تمكن من حذف ما تبقى من الأخطاء النظامية المتوافرة في الإحداثيات، وأبقى على الأخطاء العرضية المتوافرة التي توزيعها هو توزيع غاوص.

8- فيما يتعلق بمعالجة قياسات أنظمة الـ GPS وفق الطريقة المقترحة تبقى هذه الطريقة على المخططات المساحية المختلفة ولاسيما العقارية منها كما هي، لأنّ قيمتها المادية عالية جداً، ولا يمكن أن نستبدل بها مخططات مبنية على أساس نظام الـ GPS فقط، ناهيك عن الحقوق القانونية المترتبة على تلك المخططات إن كانت مثلاً العقارية في أي نزاع يتناول حدود الملكية العقارية.

نظامين يقتربان من بعضهما بعضاً، إذ الدوران (Rotation) يكون له تأثير أقل بكثير من تأثير الانسحاب (Translation) كما بينا ذلك في الفقرة (1.4) من التطبيق العددي في هذا البحث.

النتائج والتوصيات:

1- إنّ ظهور الفروق بين إحداثيات النظامين (نظام الـ GPS والنظام المستوي) أمرٌ لا بدّ منه، نظراً إلى التباين في الزمن بين القياسات، وهو قرنٌ من الزمن، أي إنّ تغيير أمكنة توضع النقاط الجيوديزية من الدرجة الأولى والثانية خلال الزمن أمرٌ مؤكد بسبب عواملٍ عديدةٍ؛ منها: الهزات الزلزالية الضعيفة المتواترة، والانزلاقات المحتملة.....

2- إنّ هذه الفروق هي محصلة اختلاف أسلوبٍ كان متبعاً في حساب الشبكات القديمة، حيث تجزئة الشبكات في أثناء الحساب كان مفروضاً بسبب ضعف أداة الحساب المستخدمة آنذاك.

3- تكون معالجة هذه الفروق مجدية إذا اتبعنا أسلوب ترشيح هذه الفروق بغية حذف الجانب العرضي فيها - قدر الإمكان - وإظهار الجانب النظامي، وذلك من خلال معالجة الإحداثيات (x,y) المعدلة بالترشيح للنقاط المدروسة جميعها مع مثيلاتها في النظام الإحداثي المستوي، معالجة تمر بتحويل من الدرجة الأولى بعد اشتقاق معادلته اشتقاقاً يستند إلى خواص التمثيل المطابق لمستوي على ذاته معتمدين في ذلك توابع الحقل العقدي، كما بيناه في هذا البحث.

4- إنّ التحويل المقترح المطبق على القيم المرشحة للإحداثيات، يعطي أفضل النتائج، لأنه يصبح مطبقاً على نظامين يختلفان بالجزء النظامي تقريباً، وهو أمرٌ مطلوب، وهذا ما قمناه في هذا البحث (انظر الجدول 1).

5- عند معالجة نتائج قياسات أنظمة الـ GPS لإحداثيات نقاط الشبكة من الدرجة الأولى والثانية نوصي بتطبيق طريقتنا المقترحة وهي:

- معالجة فروق الإحداثيات بطريقة الترشيح [4].

"المراجع" "References"*

المراجع باللغة العربية:

- (1) الصيفي أنور، رضوان وائل. المساحة (2). دمشق: جامعة دمشق، العام 2011.
- (2) بيلاني حسن، القرني عبد الله، " نظام إسقاط جديد مقترح لخرائط المملكة العربية السعودية". مجلة جامعة الملك سعود، كلية الهندسة، مركز البحوث، رقم البحث 57/427، العام 2007.
- (3) أحمد محسن، نظرية الأخطاء (1،2). تشرين: جامعة تشرين، العام 2012.
- (4) عجاج عبد الرزاق، " معالجة الفروق الناتجة عن مقارنة إحداثيات شبكة المثلثات من الدرجة الأولى والثانية الناتجة عن الحسابات التقليدية مع نظائرها الناتجة عن القياسات بواسطة نظام GPS". مجلة جامعة الملك سعود (العلوم الهندسية)، رقم البحث 1044، قبل للنشر، العام 2014.

المراجع باللغات الانكليزية والفرنسية والروسية:

- (5) Маркузе Ю. И. *Основы метода наименьших квадратов и уравнительных вычислений*. Учебное пособие. город Москва. 2005г.
- (6) Маркузе Ю.И, Антипов А.В. *Возможности улучшения алгоритма объединения спутниковых и наземных сетей*. Международная научно - техническая конференция. Посвященная 225-летию МИИГАиК. Москва. 2004г.
- (7) Tienstra, J. M.; *Theory of adjustment of normally distributed observations*, AMESTERDAM ,1956.
- (8) Youssef Wassouf. *Sur l'approximation d'une surface de second degré sur Un ensemble des points de l'espace R3*. Recherche présentée a' l' école Polytechnique Fédérale de Zurich, 1997.