

المطرقة المائية والفعل المتبادل بين الماء وجدار الأنبوب والتربة

د.م. وسام نخلة*

م. جهاد سابا**

الملخص

يعدُّ موضوع المطرقة المائية، والفعل المتبادل بين الماء وجدار الأنبوب والتربة، من الموضوعات قيد البحث والتجريب التي تعتمد على التداخل بين عدة فروع من الهندسة المدنية، إذ يجب التعامل مع معادلات المطرقة المائية الكلاسيكية (طريقة المميزات)، ومعادلات الديناميك الإنشائي، ومعادلات الجيوتكنيك، أي ثلاث جمل معادلات تشكل جملة معادلات موسعة تفاضلية جزئية لاختية، وذلك لحل مسائل المطرقة المائية في المشاريع المهمة، والوصول إلى نتائج تقارب نتائج القياسات الحقلية، إذ تعطي طريقة المميزات الموسعة فروقاً واضحةً. ولا يمكن حل جملة المعادلات الموسعة تحليلياً، لذلك يجري البحث والعمل على تطوير طرائق عددية مثل طريقة المميزات الموسعة التي تستخدم لحل جملة معادلات هيدروليكية، وطريقة المميزات-العناصر المحدودة، تستخدم لحل جملة معادلات هيدروليكية إنشائية، وطريقة فروق المحدودة لحل جملة معادلات إنشائية- جيوتكنيك.

يعتمد البحث على دمج طريقة المميزات الموسعة وطريقة العناصر المحدودة وطريقة الفروق المحدودة؛ وذلك لحل جملة المعادلات الموسعة، ولإفادة من ميزات كل طريقة والتخفيف من سلبياتها، ثم التطبيق على مثال لبيان إيجابيات الطريقة العددية المقترحة، وأهمية اعتماد جملة المعادلات الموسعة بدل الطريقة الكلاسيكية (طريقة المميزات). وقد تبين بالنتيجة أن جملة المعادلات الموسعة تعطي نتائج أقرب إلى القياسات الحقلية من نتائج الطريقة الكلاسيكية، وأن الطريقة العددية المقترحة أكثر تفاعلية، وأكثر استقراراً، واتسمت بإيجابيات الطرائق المدمجة وتجاوز بعض سلبياتها.

الكلمات المفتاحية: المطرقة المائية - تفاعل الماء مع جدار الأنبوب - تفاعل جدار الأنبوب مع التربة - طريقة المميزات الموسعة - طريقة العناصر المحدودة - طريقة الفروق المحدودة.

* مدرس في قسم الهندسة المائية-جامعة دمشق- كلية الهندسة المدنية.

** مديرة مياه الشرب - وزارة الموارد المائية- الجمهورية العربية السورية.

1- المقدمة:

الكلاسيكية ونتائج حل جملة المعادلات الموسعة، وهي الأقرب إلى نتائج القياسات الحقلية، يبرر الجهود الرياضي المبذول لحل جملة المعادلات الموسعة.

هَدَفَ البحث إلى:

دمج طريقة المميزات-العناصر المحدودة -MOC، الملائمة لحل جملة معادلات هيدروليكية-إنشائي، وطريقة الفروق المحدودة FDM، الملائمة لحل جملة معادلات إنشائي-جيوتهكنيك، لحل جملة المعادلات الموسعة، بحيث يُفاد من إيجابيات الطريقتين والتخلص من بعض سلبياتهما.

تطبيق الطريقة العددية المقترحة على مثال عملي وإظهار الفروق بين نتائج تطبيق جملة المعادلات الموسعة، ونتائج الطريقة الكلاسيكية.

ولتحقيق هذين الهدفين جرى العمل على:

- كتابة برنامج حاسوبي بلغة C++ اعتماداً على الطريقة العددية المقترحة؛ وذلك لحل جملة المعادلات الموسعة.

- تطبيق البرنامج الحاسوبي على حالة دراسية لبيان الفروق بين نتائج حل جملة المعادلات الموسعة ونتائج الطريقة الكلاسيكية، ومعرفة إيجابيات الطريقة العددية المقترحة.

3- معلومات أساسية:**3-1- معادلات المطرقة المائية:**

انطلاقاً من مبدأي انحفاظ الكتلة، وكمية الحركة، تُستنتج معادلات المطرقة المائية ثنائية البعد⁽⁴⁾:

- معادلة الاستمرار: (Continuity Equation (2D)

$$\frac{1}{\rho_f a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_r) = 0 \quad (1)$$

إذ: $p(N/m^2)$ - ضغط الماء الداخلي.

$v_z(m/s)$ - سرعة الماء المحورية.

$v_r(m/s)$ - سرعة الماء القطرية.

$\rho_f(kg/m^3)$ - الكتلة الحجمية للماء.

$r(m)$ - إحداثي مكاني باتجاه القطر.

$z(m)$ - إحداثي مكاني باتجاه المحور.

يدرس موضوع المطرقة المائية مسائل نشوء، أمواج الضغط وانتشارها وانعكاسها في منظومات أنابيب المياه. التي يمكن أن يكون لها جبهة موجة قائمة، وسعات كبيرة، إذ تستطيع هذه الأمواج تحريك الأنابيب بالاتجاهين القطري والمحوري. ممّا يؤدي إلى ضغط التربة المجاورة، ونشوء قوى احتكاك بين الأنابيب والتربة. وبالمقابل يؤدي ضغط التربة المجاورة للأنابيب، وقوى الاحتكاك إلى الحد من حركة الأنابيب، وتؤثر حركة الأنابيب من خلال معادلة الاستمرار في معادلات المطرقة المائية، ومن ثمّ في قيم الضغط وغزارة الجريان.

تشكل معادلات المطرقة المائية ومعادلات الديناميكي الإنشائي ومعادلات ضغط التربة المجاورة، جملة معادلات موسعة، وهي معادلات تفاضلية جزئية لا خطية. ولا يمكن حل منظومة المعادلات الموسعة تحليلياً. لذا تُدرّس وتُطوّر عدة طرائق عددية لحل جملة المعادلات الموسعة على منظومات هيدروليكية نموذجية.

فقد طُوّرت نماذج مبسطة للحل، اقتصر على دراسة الفعل المتبادل بين الماء والأنبوب، كما في بحوث A.S. Tijsseling et al، أو نماذج لدراسة الفعل المتبادل بين الأنبوب والتربة، كما في بحوث Balvant Rajani and Solomon Tesfamariam. هذا فضلاً عن بعض القياسات الحقلية في المنشآت النووية والمشاريع الصناعية والمدنية المائية العملاقة. وتؤكد النماذج والقياسات الحقلية ضرورة إجراء المزيد من الدراسات وتطوير النماذج لتقارب نتائج القياسات الحقلية.

2- هدف البحث:

يواجه تطبيق جملة المعادلات الموسعة على منظومات هيدروليكية كثيراً من الصعوبات الرياضية التي كثيراً ما تؤدي إلى حالات عدم استقرار رياضي (عدم الحصول على حل محدد). ولذلك فإن دراسة المزيد من الحالات وإظهار الفروق بين نتائج الطريقة

- معادلات المطرقة المائية الموسعة^(5,4):

Extended water hammer Equations

عندما تتعرض منظومة أنابيب لقوة باتجاه محور الأنابيب تنشأ حركة محورية تؤدي، بحسب معامل بواسون، إلى انتقال بالاتجاه القطري، وباعتبار الحركة المشتركة للأنابيب عند الوصلات Junction

Couple فإن معادلة الحركة تأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \left\{ \frac{1}{K} + (1-\nu^2) \frac{2R}{E.e} \right\} \frac{\partial P}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}, \text{ or}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_f . a^2} \frac{\partial P}{\partial t} = 2\nu \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} \quad (7)$$

$$a = \sqrt{k / (\rho_f * (1 + (1-\nu^2) * k.D / (E.e)))}$$

-2-3 معادلات الديناميك الإنشائي للأنابيب⁽⁵⁾:

Dynamic Structure Equations

توصف الإجهادات والتشوهات في الأنابيب عند تعرضها لقوة ديناميكية بالمعادلات ثنائية البعد الآتية:

- معادلة الحركة المحورية (2D):

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = - \frac{\nu . R}{E.e} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (9)$$

إذ: u_z (m) - الانتقال المحوري للأنبوب. σ_z (N/m²) - الإجهاد المحوري للأنبوب. ρ_t (kg/m³) - الكتلة الحجمية لمادة الأنبوب.

- معادلة الحركة القطرية (2D):

$$\rho_t \frac{\partial \dot{u}_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} - \frac{\sigma_\phi}{r} \quad (10)$$

إذ: u_r (m) - انتقال الأنبوب قطعياً. σ_r (N/cm²) - الإجهاد القطري في الأنبوب. σ_ϕ (N/cm²) - الإجهاد المحيطي في الأنبوب. ϕ - إحدائي مكاني زاوي.

عند استنتاج هذه المعادلات أهملت الحدود اللاخطية، وقوة الجاذبية، وقوى القص، وقساوة العزم، والعتالة الدورانية، والتخميد الإنشائي.

وللوصول إلى صياغة أحادية البعد، تكامل المعادلتان

(8) و (10) بالنسبة إلى r من R إلى $R+e$,

فتأخذان الشكل الآتي:

t (s) - متغير زمني.

-a(m/s) سرعة موجة الضغط، وتُعطى بالعلاقة:

$$a = \sqrt{K / (\rho_f + \rho_f . K . D / (E.e))}$$

إذ K معامل انضغاطية الماء، D قطر الأنبوب، E معامل مرونة مادة الأنبوب، e سماكة جدار الأنبوب.

- معادلة الحركة المحورية (2D):

Equation of motion in axial direction

$$\rho_f \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

- معادلة الحركة القطرية (2D):

Equation of motion in radial direction

$$\rho_f \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

في أثناء اشتقاق معادلات المطرقة المائية أهملت قوة الجاذبية، واللزوجة، والحدود اللاخطية، بسبب صغرهما النسبي قياساً إلى بقية الحدود، لذلك تحولت جملة معادلات المطرقة المائية إلى جملة معادلات خطية.

إن v_r ، v_z ، p ، هي توابع للزمن والمكان (r, z)، وهذا ما يجعل المعادلات ثنائية البعد. وللوصول إلى صياغة أحادية البعد تتسجم مع النظرية الكلاسيكية، تكامل المعادلات (1) و (2) و (3) بالنسبة إلى r من 0 إلى R (نصف القطر الداخلي)، وبعد إجراء عمليات جبرية، تنتج المعادلات الآتية:

$$\frac{1}{\rho_f . a^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{2}{R} v_r |_{r=R} = 0 \quad (4)$$

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \rho_f R \frac{\partial v_r}{\partial t} |_{r=R} + p |_{r=R} - P = 0 \quad (6)$$

إذ:

$$P = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi p r dr$$

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi v_z dr$$

تُطبق هذه المعادلات على الأنابيب المصنعة من الفولاذ، والفونت المرن التي تُظهر سلوكاً مرناً واضحاً عند التشوهات الصغيرة (علاقة خطية بين الإجهاد والتشوهات).

نظرية فينكلر Winkler pipe-soil interaction التي تتضمن في حالة الفعل المتبادل القطري الأسس الآتية:

$$\sigma_{\theta}^p = (P - P_e) \left(\frac{D - e}{2e} \right) \quad (15)$$

إذ:

D (cm) - قطر الخارجي للأنبوب .

e (cm) - سماكة الأنبوب.

P_e (N/cm²) - الضغط الخارجي (على الأنبوب).

إن الانتقال القطري للأنبوب مقيد بالقساوة القطرية للتربة المحيطة. وتُعطى علاقة القوة بالانتقال القطري للأنبوب في وسط غير محدود بالصيغة:

$$P_e = k_r^0 u_r = \frac{E_s}{(D/2)(1 + \nu_s)} u_r \quad (16)$$

إذ:

k_r^0 (N/cm³) - معامل قساوة التربة بالاتجاه القطري

E_s (N/cm²) - معامل مرونة التربة.

ν_s - معامل بواسون للتربة.

D (cm) - قطر الأنبوب.

u_r (cm) - الانتقال بالاتجاه القطري.

يفترض بأنه لا توجد قيود بالاتجاه القطري في أجزاء

الأنبوب عندما لا يكون مسنوداً، ومن ثم $P_e=0$.

ويمكن أن يتعرض الأنبوب إلى عزم باتجاه محور

الأنبوب، ويتأثير بواسون يُنتج الإجهاد المحوري

إجهاداً محيطياً كما يأتي:

$$\sigma_{\theta}^f = -\nu_p \sigma_z^f = -\nu_p \left(\frac{M_z D}{2I_{zz}} \right) \quad (17)$$

إذ:

σ_z^f (N/cm²) - الإجهاد المحوري العزمي.

ν_p - معامل بواسون للأنبوب.

M_z (N.cm) - العزم باتجاه المحور.

I_{zz} (cm⁴) - عزم عطالة مقطع الأنبوب حول المحور z

من ثم يُعطى الإجهاد المحيطي الكلي بالعلاقة:

$$\sigma_{\theta}^{tot} = \sigma_{\theta}^p + \sigma_{\theta}^f$$

- باتجاه محور الأنبوب:

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} \quad (11)$$

- باتجاه القطر:

$$\rho_t \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} = \frac{R+e}{(R+0.5e)e} \sigma_r \Big|_{r=R+e} - \frac{R}{(R+0.5e)e} \sigma_r \Big|_{r=R} - \frac{1}{R+0.5e} \bar{\sigma}_{\phi} \quad (12)$$

إذ:

$$\bar{u}_z = \frac{1}{2\pi(R+0.5e)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_z dr$$

$$\bar{u}_r = \frac{1}{2\pi(R+0.5e)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \dot{u}_r dr$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{2\pi(R+0.5e)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_z dr$$

$$\bar{\sigma}_{\phi} = \frac{1}{e} \int_R^{R+e} \sigma_{\phi} dr$$

ترتبط معادلات الحركة بين السرعة والإجهادات (المحورية-القطرية-المحيطة). ولتكتمل جملة

معادلات الديناميك الإنشائي، يجب إضافة علاقة

الإجهاد بالتشوه بحسب قانون هوك المعمم

generalized Hooke's law، ومنها يمكن كتابة علاقة

ثنائية البعد بين الإجهاد والانتقال:

$$\sigma_z = E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \sigma_{\phi} + \nu \sigma_r \quad (13)$$

وبالتكامل بالنسبة إلى المتغير r من R إلى R+e،

والاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ينتج:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \nu \frac{\partial \bar{\sigma}_{\phi}}{\partial t} + \nu \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial t} \quad (14)$$

إذ:

$$\bar{\sigma}_{\phi} = \frac{1}{2\pi(R+0.5e)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_{\phi} dr$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{2\pi(R+0.5e)e} \int_R^{R+e} 2\pi r \sigma_r dr$$

3-3- معادلات ضغط التربة:

يفرض أن التربة تسلك إنشائياً كمادة مرنة لدنة

Elastoplastic material، وتتشوه بتناسب خطي مع

الإجهاد، إلى أن يبلغ التشوه الانزياح deformation الحدّي

limiting displacement، عندها تسلك التربة

سلوكاً لدناً. ويعتمد البحث في وضع المعادلات التي

تصف الفعل المتبادل بين الأنابيب والتربة على

لتحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية (بحري التكامل على خطين مميزين بميل $\pm a$ يرمز لهما C^+ , C^- على شبكة المميزات. وهي شبكة إحداثية توضيحية، ترسم بحيث يكون محور الأنبوب محوراً أفقياً والزمن كمحور شاقولي، مع تقسيم الأنبوب إلى أجزاء حسابية Δz ، ويقسم محور الزمن إلى مدد Δt بحيث $(\Delta t \leq \Delta z/a)$.

ويمكن تطوير طريقة MOC بحيث تحل جملة معادلات هيدروليكية-إنشاءات (معادلات المطرقة المائية ومعادلات الديناميك الإنشائي) التي يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$A \frac{\partial y}{\partial t} + B \frac{\partial y}{\partial z} = r \quad (18)$$

إذ: B, A مصفوفتا الأمثال الثابتة

$$y = \{V, H, u_z, \sigma_z\}^T$$

يمكن تحويل هذه المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضل تام، ومن ثم تكامل على الخطين المميزين الموجب والسالب المقابلين للقيم الذاتية لسرعة موجة الضغط، وعلى الخطين المميزين المقابلين للقيم الذاتية لسرعة موجة الإجهاد، فتنتج المعادلات التوافقية compatibility equations الآتية:

$$\begin{aligned} (A)_{11}(V_p) + (A)_{12}(H_p) + \\ (A)_{13}(\dot{u}_{zp}) + (A)_{14}(\sigma_{zp}) &= \Delta t.[r_1], \\ (A)_{21}(V_p) + (A)_{22}(H_p) + \\ (A)_{23}(\dot{u}_{zp}) + (A)_{24}(\sigma_{zp}) &= \Delta t.[r_2], \\ (A)_{31}(V_p) + (A)_{32}(H_p) + \\ (A)_{33}(\dot{u}_{zp}) + (A)_{34}(\sigma_{zp}) &= \Delta t.[r_3], \\ (A)_{41}(V_p) + (A)_{42}(H_p) + \\ (A)_{43}(\dot{u}_{zp}) + (A)_{44}(\sigma_{zp}) &= \Delta t.[r_4] \end{aligned} \quad (19)$$

إذ $(A)_{nm}$ أمثال ثابتة، $(r)_{nm}$ بارامترات ثابتة.

- طريقة FEM:

تستخدم طريقة FEM لحل معادلات الديناميك الإنشائي لجدار الأنبوب، وهي مستخدمة في البرامج الإنشائية. إذ يُفرض أن السلوك الإنشائي للأنبوب هو جائز يُقسم إلى عناصر محدودة جائزية، ثم يُحمل ديناميكياً بحمولة

تصف جملة المعادلات الموسعة انعكاس أمواج ضغط Pressure wave نشوءها وانتشارها تنتشر بسرعة محددة في الماء والأنبوب، وأمواج إجهاد Stress wave تنتشر بسرعة محددة في الأنبوب والترية، وتكون سرعة موجة الإجهاد أكبر بكثير من سرعة موجة الضغط.

3-4- الشروط الابتدائية والمحيطية:

إن تطبيق جملة المعادلات الموسعة على منظومة هيدروليكية غير كافٍ للحل الهيدروليكي والإنشائي، وإيجاد تغيرات الضغط، والغزارة (متغيرات هيدروليكية)، والإجهاد والانتقال (متغيرات إنشائية) زمنياً ومكانياً. ولإيجاد الحل يجب معرفة الشروط الابتدائية، وجملة شروط محيطية تمثل شروط التماس بين الماء والأنبوب ومعادلات المنحنيات المميزة للأجهزة الهيدروليكية، تُصاغ عند وجود أجهزة هيدروليكية (عقدة تقعر - مضخة - سكر تحكم بالغزارة - سكر تحكم بالضاغط) بين أنبوبين.

4- طرائق الحل العددية:

إن جملة المعادلات التي تصف الفعل المتبادل بين المطرقة المائية وجدار الأنبوب والترية هي معادلات تفاضلية جزئية لاخطية قطعية زائدة، ولا توجد طريقة تحليلية لحل هذه المعادلات. لذلك تُطور طرائق عددية ما تزال قيد البحث والدراسة. وتقدم هذه الطرائق العددية حلولاً لجملة جزئية من جملة المعادلات الموسعة في حالات خاصة، مع وضع عدة فرضيات تبسيطية.

طرائق الحل العددي قيد التطوير:

- طريقة المميزات الموسعة MOC.
- طريقة العناصر المحدودة FEM.
- طريقة الفروق المحدودة FDM.
- طريقة MOC:

تستخدم طريقة MOC لحل معادلات المطرقة المائية (تفاضلية جزئية، لاخطية، قطعية). وتعتمد على تحويل التفاضل الجزئي إلى تفاضل تام، والتكامل

يجري بشرط الجفاف Dry Conditions وتختار المسافة بين الشروط المحيطية كبيرة بما يكفي لتخفيف تأثير هذه الشروط. ثم تُعطى الشروط المحيطية لنتيبت الانتقال في الاتجاه الأفقي في مستوي التشوه في كلا الجانبين من الشبكة الحسابية، و يُعطى شرط الانتقال في الجانب السفلي من الشبكة. وكشروط ابتدائية يُعطى توازن التربة تحت تأثير إجهادات الجاذبية. ويُمثل الفعل المتبادل بين الأنابيب والترية في طريقة FDM بعنصر بيني Interface Element إذ يسمح بالفصل بين الأنابيب والترية. ويُفرض عدم وجود دوران في العقد الحسابية بسبب السلوك الصلب. وبسبب الفعل المشترك عند الوصلات Junction Couple يمكن حصول انتقال نسبي محوري بين الأنابيب والترية، لذلك تُفرض زاوية احتكاك بيني θ_m تساوي $\theta_p/2$ إذ θ_p زاوية الاحتكاك الداخلي للتربة، وتتعلق بطبيعة السطح الخارجي للأنبوب.

تكتب المعادلات بطريقة FDM بدلالة قيم المجاهيل عند العقد الحسابية، وتنتقل التغيرات الحاصلة على قيم المجاهيل عند أي عقدة إلى العقد المجاورة عبر الخطوط الواصلة بين العقد.

يعتمد البحث على الدمج بين طريقة MOC-FEM وطريقة FDM للإفادة من إيجابيات هاتين الطريقتين والتخفيف من سلبياتهما، والوصول إلى استقرار رياضي أفضل، أي الحصول على حلول بقيم محدودة بشكل أسرع أو عند إخفاق إحدى الطريقتين.

5- مثال: الفعل المتبادل بين الماء والأنبوب في حالة الأنبوب المرن:

منظومة هيدروليكية مكونة من خزان - وأنبوب مستقيم - وسكر. ويُطلب حساب تغير الضغط مع الزمن عند السكر، وفي مقطع منتصف طول الأنبوب نتيجة الإغلاق الآتي للسكر، علماً أنه قيسَتِ الغزارة و الضغط في المقطعين.

معطيات الأنبوب في الجدول (1).

موزعة محورياً أساسها الضغط الهيدروليكي المتغير زمانياً ومكانياً.

تتضمن طريقة FEM حساب مصفوفات الكتل M ، ومصفوفات القساوة K للعناصر جميعها ووضعها في مصفوفات كلية. تُعطى معادلة الديناميك الإنشائي للأنبوب بدلالة الانتقال بالشكل:

$$M\ddot{u} + Ku = f \quad (20)$$

إذ f شعاع القوى، وتُعطى M ، K ، f بدلالة توابع الشكل s . في حال عدّ الأنبوب كجائز تكون توابع الشكل خطية وعندها:

$$M = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, K = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, f = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذ l طول العنصر المحدود.

ويمكن تطوير طريقة FEM لحل جملة معادلات هيدروليكية-إنشائية بطريقة العمل الوهمي، بحيث تصاغ المعادلات الإنشائية بدلالة الانتقال u ، وتصاغ المعادلات الهيدروليكية بدلالة الضغط P . يُقسم الأنبوب إلى عناصر محدودة جائزية. وتُعرف توابع الشكل وتوابع الاختبار بما يوافق تشوهات الأنبوب الستاتيكية. ثم تُحسب مصفوفة الكتلة M ومصفوفة القساوة K لكل عنصر، وتوضع في مصفوفات تمثل كامل المنشأة. تُحدد أنماط اهتزاز الأنابيب وتواترها بإجراء تحليل اهتزازي للمعادلة (20).

ويمكن حل جملة معادلات المطرقة المائية وجملة معادلات الديناميك الإنشائي باستخدام طريقة MOC وطريقة FEM بإجراء حل تكراري.

- طريقة FDM:

تُستخدم طريقة FDM لحل المعادلات المحورية التفاضلية والعزمية التفاضلية والقطرية الجبرية التي تصف الفعل بين الأنابيب والترية، إذ تُكتب المعادلات في كل خطوة من خطوات الحل. ويجري التحليل بتقسيم الوسط المحيط بالأنبوب بمجموعة عقد حسابية تصل بينها خطوط تشكل الشبكة الحسابية. ويُفرض شرطان، الأول أن الفعل المتبادل بين الأنابيب والترية يجري في مستوي التشوه Plane Strain، والثاني أن الفعل المتبادل

يبين الشكل (1) تغير الضغط بدلالة الزمن عند السكر نتيجة توقف مفاجئ للسكر. ويبين الشكل (2) تغير الضغط في مقطع عند منتصف المسافة مع الزمن نتيجة إغلاق آني للسكر.

الخط المنقط نتيجة الحساب بطريقة المطرقة المائية الكلاسيكية، والخط المستمر نتيجة الحساب باستخدام طريقة المميزات المميزة وجملة المعادلات الموسعة. يلاحظ على الخط المستمر أن الضغط زاد لحظة الإغلاق إلى أقل من 1 MPa ليزداد بعدها إلى أكثر من 1 MPa، وينخفض إلى أقل من 1 MPa، فعند الصدمة الأولى لم يبدأ تأثير الفعل المتبادل بين الماء والأنابيب والترية الذي أسهم في رفع الضغط زيادة عن 1 MPa، وهذا أقرب إلى نتائج القياسات، مما يبين أهمية جملة المعادلات الموسعة وإيجابيات طريقة الدمج العددية.

الجدول (1)

20	الطول (m)
797	القطر (mm)
8	السماكة (mm)
7900	كثافة الأنبوب (Kg/m ³)
210	معامل يونغ للأنبوب (GPa)
0.3	معامل بواسون للأنبوب
100	معامل مرونة التربة (MPa)
0.3	معامل بواسون للتربة
1024.7	سرعة موجة الضغط (m/s)
5280.5	سرعة موجة الإجهاد (m/s)
1	السرعة في الحالة المستقرة (m/s)
0	ضغوط الخزان (m)

يُقسم الأنبوب إلى جزعين بطول 10م، وتحدد الخطوة الزمنية 0.01 ثانية.

تُكتب جملة المعادلات الموسعة كما يأتي:

- معادلات المطرقة المائية:

$$B = 1024 / (9.81 * 3.14 * 0.797^2 / 4) = 209.5$$

$$C_p = H_{A1} + 209.5 Q_{A1}$$

$$C_n = H_{A2} + 209.5 Q_{A2}$$

$$C^+ : H_p = -209.5 Q_p + C_p$$

$$C^- : H_p = 209.5 Q_p + C_n$$

- معادلات الديناميك الإنشائي: بتقسيم الأنبوب إلى

عنصر محدود جانزي واحد تُعطى المعادلات بالشكل

المصنوفي:

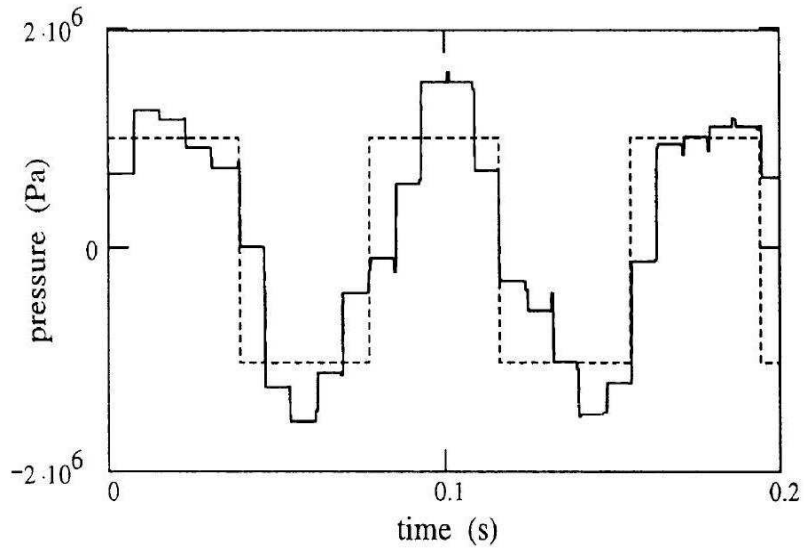
$$\frac{20}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{za} \\ \ddot{u}_{zb} \end{bmatrix} + \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{za} \\ u_{zb} \end{bmatrix} = \frac{20}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- معادلات الحيوتكنيك:

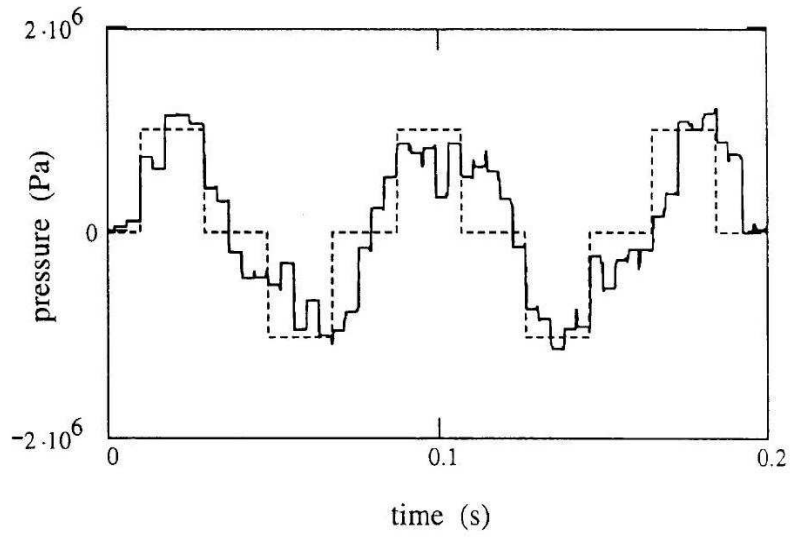
$$P_e = \frac{E_s}{D/2(1+\nu_s)} u_r = \frac{1000}{0.797/2(1+0.3)} u_r$$

$$\sigma_\theta^p = (P_i - P_e) \left(\frac{0.797 - 8}{2 * 8} \right)$$

تُحل هذه المعادلات مع الشروط المحيطة والابتدائية في برنامج MATLAB، وفي برنامج كُتب بلغة C++ لحل جملة المعادلات الموسعة بثلاث طرائق، بطريقة MOC-FEM، وبطريقة FDM، وبطريقة ناتجة عن دمج الطريقتين السابقتين، وأخذت النتائج إلى برنامج Excel لرسم النتائج.



الشكل (1) تغير الضغط بدلالة الزمن عند السكر،
المنقط بالطريقة الكلاسيكية، والمستمر بجملة المعادلات الموسعة.



الشكل (2) تغير الضغط بدلالة الزمن في منتصف المسافة،
المنقط بالطريقة الكلاسيكية، والمستمر بجملة المعادلات الموسعة.

6- الخلاصة:

إن وجود فروق بين نتائج القياسات الحقلية ونتائج تطبيق طريقة المطرقة المائية الكلاسيكية يحث الباحثين على دراسة تأثير الخواص الإنشائية للأنايب ودراسة الفعل المتبادل بين الأنايب والتربة للوصول إلى صياغة أولية لجملة معادلات موسعة تصف نظرية المطرقة المائية، وإلى تطوير طرائق عديدة لحل جملة المعادلات الموسعة. وبسبب الصعوبات الرياضية والهندسية في تطبيق جملة المعادلات الموسعة مازال المهندسون يطبقون الطريقة الكلاسيكية. ولبيان ضرورة اعتماد جملة المعادلات الموسعة ولتذليل بعض الصعوبات الرياضية التي تحول دون تطبيقها قام الباحثون بما يأتي:

- دمج طريقة المميزات-العناصر المحدودة وطريقة الفروق المحدودة للحصول على طريقة عددية لحل جملة المعادلات الموسعة، وللإفادة من إيجابيات الطريقتين والتخفيف من سلبياتهما.

- كتابة برنامج بلغة C++ لتطبيق الطريقة العددية الناتجة لحل جملة المعادلات الموسعة وبرنامج لتطبيق الطريقة الكلاسيكية على حالة دراسية لبيان الفرق.

ونتيجة دمج الطريقتين العدديتين وكتابة البرنامج وتطبيقه على عدة حالات دراسية توصلنا إلى ما يأتي:

- بيّنت نتائج الطريقة الكلاسيكية ونتائج جملة المعادلات الموسعة وجود فروق واضحة ذات تأثير في تصميم منظومات الأنايب، وتصميم تجهيزات الحماية من المطرقة المائية، وهذا ما يبرر ضرورة اعتماد جملة المعادلات الموسعة في حل مسائل المطرقة المائية.

- تبين عند تنفيذ البرنامج الذي يحسب وفق الطريقة العددية الناتجة التي تحل جملة المعادلات الموسعة على عدة حالات دراسية بأن التقارب من الحل والاستقرار الرياضي (الحصول على حل محدد) أفضل مما هو في الطريقة الكلاسيكية.

7- المراجع: *References

- 1- Balvant Rajani and Solomon Tesfamariam, Uncoupled axial, flexural, and circumferential pipe-soil interaction analysis of partially supported jointed water mains, *Can.Geotech.J.*Vol.41, (2004).
- 2- Fox J.A., *Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks*, Macmillan, London, (2002).
- 3- Larock B. E., Jeppson R. W., Watters G Z., *Hydraulic of Pipeline Systems*, CRC Press LLc, Washinton.D.C., (2000).
- 4- Tijsseling A. S. and Bergant A. *Meshless Computation of Water Hammer* Endhoven University of Technology.(2007).
- 5- Tijsseling A. S. and David C Wiggert, fluid transient and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping, *Appl Mech Rev* vol 54, no 5, September (2001).
- 6- Tijsseling A. S. *Water hammer with fluid-structure interaction in thick-walled pipes*, Endhoven University of Technology.(2007).
- 7- Volkov E. A., *Numerical Method*, Mir Publishers Moscow, (1986).
- 8- Wylie E. B. and Streeter V.L., *Fluid Transients*, MOGraw Hill Inc, USA, (1989).
- 9- Wylie E. B. and Streeter V.L., *Fluid Transients*, MOGraw Hill Inc, USA, (1993).
- 10- Wylie E. B. and Streeter V.L., *Fluid Transients*, MOGraw Hill Inc, USA, (1993).
- 11- Yu SHAO, TU-qiao ZHANG, *Elastoplastic pipe-soil interaction analysis of partially-supported jointed water mains*, *Journal of Zhejiang University SCIENCE A* ISSN 1673-565X, Hangzhou, China.