حل للقشريات الاسطوانية حسب نظرية القشريات العامة "العزمية" و تطبيق ذلك في حساب قناة ري مرفوعة ذات مقطع قطعي مكافئ

الدكتور عبد الرزاق الحسين[1]

الملخص

نقدم في هذا البحث، الذي يعتمد على النظرية العامة للقشريات، حلاً للقشريات الاسطوانية ذوات مقاطع من الدرجة الثانية أو الرابعة مثل القشريات نصف الدائرية والقطعية الناقصة والقطعية الزائدة والقطعية المكافئة وغيرها، وذوات السماكات المتغيرة، ودون إهمال أي حد من حدود النظرية العامة للقشريات المرنة والرقيقة. جرت كتابة معادلات نظرية القشريات حسب التشوهات ومشتقاتها وهي مكونة من ثلاث معادلات اشتقاق جزئي. وباستعمال فصل المتغيرات جرى الحصول على n جملة من ثلاث معادلات تفاضلية عادية. يجري حل هذه المعادلات بافتراض الحل على شكل سلاسل مثلثية للمشتق ذي المرتبة الأعلى. ويجري الحصول على التشوهات ومشتقاتها بتكامل تلك السلاسل. وسوف يجري تحديد ثوابت التكامل من الشروط الحدية. وباستعمال توابع متعامدة يمكن الحصول على n جملة معادلات جبرية.

إن العدد الكلي لهذه المعادلات ومعادلات الشروط الحدية يساوي الأمثال المجهولة للسلاسل المثلثية المجهولة وثوابت التكامل. أما الحمولات الخارجية فميكن أن تكون أية حمولة، مثل الوزن الذاتي أو ضغط الماء الهيدروستاتيكي أو قوى العطالة. جرى عرض هذه الصياغة الجديدة في حل لقناة ري مرفوعة ذات مقطع قطعي مكافئ متغيرة السماكة وخاضعة للضغط الهيدروستاتيكي.

[1] أستاذ– قسم الهندسة المائية– كلية الهندسة المدنية– جامعة دمشق.

المقدمة:

لاقت القشريات انتشاراً واسعاً في المنشآت المدنية، فقد استعملت في السطوح والصوامع والسدود القوسية و أقنية الري المرفوعة وغيرها، حيث بني سد قوسي بارتفاع 270 م. يعود سبب هذا الانتشار إلى أن هذه المنشآت القشرية تعمل بصورة أساسية على الضغط مع وجود مادة بناء عالية المقاومة على الضغط وهي البيتون. وهذا التوافق بين المخطط الحسابي وخواص مواد البناء سمح بهذا الانتشار الواسع. على سبيل المثال إن سداً قوسياً تبلغ سماكته زهاء 2 م بارتفاع 88 م. واجه التحليل الإنشائي لمثل هذه المنشآت صعوبات حقيقية. وافترضت المحاولات المبكرة لتحليل القشريات إهمال العمل الثلاثي الأبعاد، واعتماد نموذج العمل القوسي. هناك طريقة أخرى لحل هذه المشكلة، هي نمذجة القشرية كمجموعة من الأقواس والأظفار، وباستخدام مساواة التشوهات في نقاط التقاطع، يمكن توزيع الحمولات بين الأقواس والأظفار.

إن الحل العام للقشريات يتطلب تكامل جملة من ثلاث معادلات تفاضلية جزئية مع تطبيق الشروط الحدية. ويشكل هذا صعوبة حقيقية ضمن الإطار العام لنظرية القشريات المرنة والرقيقة. ولهذا انصبت الجهود على التبسيط، كاعتماد نظرية الأغشية المرنة. ولكن نظرية القشريات الغشائية تهمل العزوم التي تؤدي دوراً خاصاً عند حدود القشرية. يمهد تطور طرق العناصر المحدودة لعصر جديد في طرق الحساب، ستقود إلى تقدم مهم يساعد في الحصول على حلول لأعقد المسائل. وهذه التطورات كانت أحد الأسباب التي أوقفت جهود الباحثين بالبحث عن حلول تحليلية في نظرية القشريات العامة. ومع ذلك يمكن التوصل لحلول تحليلية لبعض القشريات. سبق أن قدم المؤلف حلاً لقشرية دورانية، مع تطبيقه في تحليل سد قوسي متغير السماكة والتقوس[3]. وسوف يُقَدَّمُ في هذا البحث حلٌّ لقشريات اسطوانية متغيرة

السماكة وذات مقاطع عرضية من الدرجة الثانية أو الرابعة، كنصف دائرة وقطع مكافئ وقطع ناقص وقطع زائد مع شروط حدية مختلفة، وتطبيق ذلك لتحليل قناة ري مرفوعة ذات مقطع قطعي مكافئ ومتغيرة السماكة.

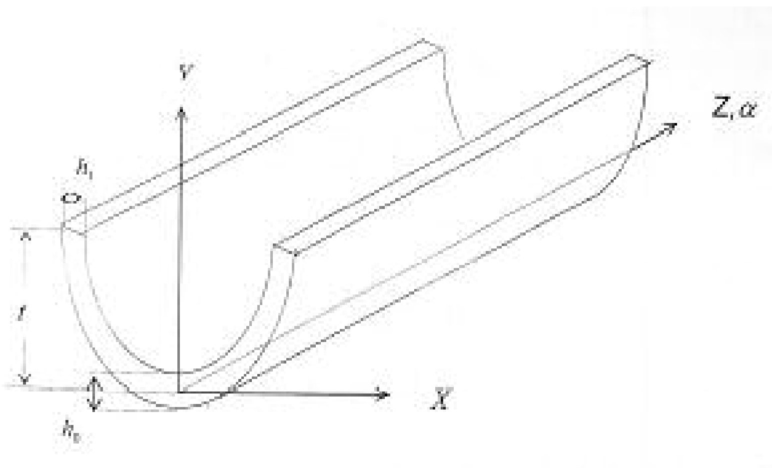
الصياغة:

للقشريات الاسطوانية مقاطع عرضية عديدة، مثل نصف الدائرية والقطعية المكافئة والقطعية الناقصة والقطعية الزائدة. وسوف نقدم في هذا البحث حلاً تحليلياً لمثل هذه القشرية على أساس النظرية العامة للنظرية العزمية للقشريات المرنة الرقيقة.

نبدأ الصياغة من الشكل العام للقشريات الاسطوانية، كما هو مبين على الشكل (1)، والتي حددت في جملة الإحداثيات(Z, Y, X.). إن السطح المتوسط لهذه القشرية، هو سطح اسطواني من الدرجة الثانية أو الرابعة، والذي نحصل عليه من تحرك خط مستقيم مولد، موازٍ لمحور الإحداثيات Z، *على* طول منحنى يمكن له أَنْ يأخذَ أي شكل من أشكال المنحنيات المنوه عنها. تحدد الإحداثيات المنحنية α و β على السطح المتوسط للقشرية . حيث خطوط α موازية للمحور Z ، في حين تنتج الخطوط β عن تقاطع سطح موازٍ للسطح XOY مع القشرية. مثل هذه الجملة ستكون متعامدة ومترافقة، وكلا α و β تشكلان خطوط التقوس الأساسي للسطح.

تحدد معادلة المقطع العرضي للقشرية الاسطوانية (أي معادلة الدليل الوسطي للسطح الاسطواني) على الشكل الآتي:

$$y = f(x) \qquad (1)$$



الشكل(١)

وكما هو معروف من نظرية السطوح، تحدد عوامل الصيغة التربيعية الأولى للسطح B , A [1] كالآتي:

$$A = 1$$

$$B = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \qquad (2)$$

إن نصف قطر التقوس الرئيسي الأول R_1 على استقامة خطوط α يساوي:

$$R_1 = \infty$$

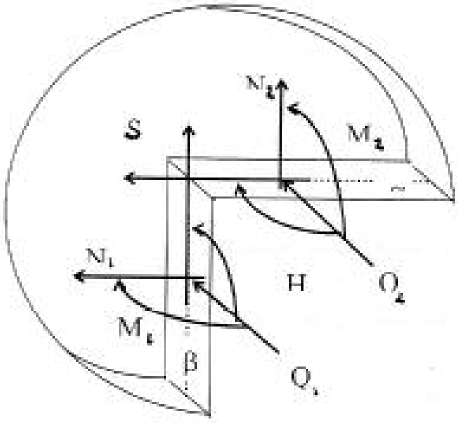
و نصف قطر التقوس الرئيسي الثاني R_2 على طول خطوط β يساوي:

$$R_2 = R = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \qquad (3)$$

عند وضع عناصر السطح هذه (R_2-R_1-B-A) في علاقات توازن القشريات المرنـــة [7-2] نحصل على:

$$B\frac{\partial N_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial S_2}{\partial \beta}+Bq_\alpha=0$$
$$\frac{\partial N_2}{\partial \beta}+B\frac{\partial S_1}{\partial \alpha}+B\frac{Q_2}{R}+Bq_\beta=0$$
$$B\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial Q_2}{\partial \beta}-B\frac{N_2}{R}+Bq_n=0 \qquad (4)$$
$$B\frac{\partial H_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial M_2}{\partial \beta}-BQ_2=0$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial \beta}+B\frac{\partial M_1}{\partial \alpha}-BQ_1=0$$
$$H_1-H_2-\frac{S_2}{R_2}=0$$

حيث القيم الآتية موضحة على الشكل 2 وهي على التوالي:



الشكل ٢

(N_1, N) ،(S_1, S_2)، (Q_1, Q_2) : القوى الجانبية وقوى القص والقوى الناظمية.

(H_1, H_2)،(M_1, M_2) : عزوم الانحناء والفتل.

q_n q_β q_α مركبات القوى المؤثرة على القشرية والمماسية للخطوط α وللخطـــوط β والناظمية على السطح المتوسط للقشرية.

سوف نعتمد الآتي، كما هو متعارف عليه في نظرية القشريات:

$$S_1 = S_2 = S$$
$$H_1 = H_2 = H$$

تأخذ العلاقات بين القوى والعزوم والتشوهات (قانون هوك) [7] الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} N_1 &= K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ N_2 &= K(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \\ S &= K\frac{1-\nu}{2}\omega \\ M_1 &= D(\chi_1 + \nu\chi_2) \\ M_2 &= D(\chi_2 + \nu\chi_1) \\ H &= D(1-\nu)\tau \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث:

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ –التشوهات الزاوية والخطية للسطح الوسطي.

χ_1, χ_2, τ – تشوهات السطح المتوسط التي تعبر عن الفتل والتحدب.

E – عامل المرونة (عامل يونغ)

ν – عامل التشوه الجانبي (عامل بواسون)

h – سماكة القشرية، ويمكن لها أن تأخذ قيماً متغيرة. و يمكن التعبير عن ذلـــك فـــي حالة التغيير الخطي بالعلاقة:

$$h = h_0 - \lambda y \qquad (6)$$

حيث :

$$\lambda = \frac{h_0 - h_1}{t}$$

h_0 – السماكة عند قعر القشرية (الشكل 1).

h_1 – سماكة الحافة العلوية للقشرية.

t – عمق القشرية .

بتعويض R_2-R_1-B-A بقيمها من العلاقات 2 – 3 في معادلات تشوه القشريات[7] نحصل على:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \\
\omega &= \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \qquad (7) \\
\chi_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \\
\chi_2 &= -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) \\
\tau &= -\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}
\end{aligned}$$

حيث: u, v, w .- مركبات التشوهات الناظمية والمماسيتين لخطوط الإحـداثيات β ، α

من الآن فصاعدا سوف يجري اعتماد الرموز الآتية:

$$\frac{\partial(--)}{\partial \alpha} = (--)', \qquad \frac{\partial(--)}{\partial \beta} = (--)^*$$

تستعمل "الفتحة" هنا للإشارة للمشتق باتجاه المتغير α أما "النجمة" فتشير للمشتق باتجاه المتغير β. نحدد $Q_{1,}Q_2$ من المعادلتين الرابعة والخامسة من مجموعـة معـادلات التوازن 4، ونضعهما في المعادلتين الثانية والثالثة مـن معـادلات التـوازن ذاتهـا، فنحصل على الجملة الآتية المكونة من ثلاث معادلات:

$$BN_1^{'} + S^* + Bq + Bq_\alpha = 0$$

$$N_2^* + BS^{'} + \frac{B}{R}H^{'} + \frac{1}{R}M_2^* + Bq_\beta = 0$$

$$BM_1^{''} + 2H^{'*} + (\frac{1}{B}M_2^*)^* - \frac{B}{R}N_2 + Bq_n = 0 \quad (8)$$

وستأخذ مجموعة معادلات التشوهات (7) الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u^{'} \\ \varepsilon_2 &= \frac{v^*}{B} + \frac{w}{R} \\ \omega &= \frac{u^*}{B} + v^{'} \qquad\qquad (9) \\ \chi_1 &= -w^{''} \\ \chi_2 &= -\frac{1}{B}(\frac{1}{B}w^*)^* \\ \tau &= -\frac{1}{B}w^{'*} \end{aligned}$$

عند وضع هذه المعادلات في معادلات قانون هوك (5) نحصل على:

$$N_1 = K(u^{'} + \nu\frac{v^*}{B} + \nu\frac{w}{R})$$

$$N_2 = K(\nu u^{'} + \frac{v^*}{B} + \frac{w}{R})$$

$$S = K\frac{1-\nu}{2}(\frac{u^*}{B} + v^{'})$$

$$M_1 = D(-w'' - \nu \frac{w^{**}}{B^2} + \nu \frac{B^* w^*}{B^3}) \qquad (10)$$

$$M_2 = D(-\nu w'' - \frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3})$$

$$H = D(1-\nu)\frac{w'^*}{B}$$

وبتعويض هذه القيم في معادلات التوازن (8) نحصل على:

$$B[K(u' + \nu \frac{v^*}{B} + \nu \frac{w}{R})]' + [K\frac{1-\nu}{2}(\frac{u^*}{B} + v')]^* + Bq_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} &[K(\nu u' + \frac{v^*}{B} + \frac{w}{R})]^* + B[K\frac{1-\nu}{2}(\frac{u^*}{B} + v')]' + \frac{B}{R}[-D(1-\nu) \\ &\frac{w^{*'}}{B}]' + \frac{1}{R}[D(-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} - \nu w'']^* + Bq_\beta = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &B[D(-w'' - \nu \frac{w^{**}}{B^2} + \nu \frac{B^* w^*}{B^3}]'' + 2[-(1-\nu)D\frac{w^{*'}}{B}]^{*'} + \frac{1}{B}[D(-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} \\ &- \nu w'']^{**} - \frac{B^*}{B^2}[D(-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} - \nu w'']^* - \frac{B}{R}[K(\frac{v^*}{B} + \frac{w}{R} + \nu u')] + Bq_n = 0 \end{aligned}$$

بإجراء كل الاشتقاقات والتحويلات والتنسيق في مجموعة المعـادلات (11) نحـصل على :

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\nu)h}{2B}u^{**} + [\frac{(1-\nu)h^*}{2B} - \frac{(1-\nu)B^* h}{2B^2}]u^* + Bhu'' + \\ &\frac{(1+\nu)h}{2}v^{*'} + \frac{(1-\nu)h^*}{2}v' + \frac{\nu Bh}{R}w' = -\frac{(1-\nu^2)B}{E}q_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(1+\nu)h}{2}u^{*'}+\nu h^{*}u^{'}+\frac{h}{B}v^{**}+(\frac{h^{*}}{B}-\frac{B^{*}h}{B^{2}})v^{*}+\frac{(1-\nu)Bh}{2}v^{''}-\\
&\frac{h^{3}}{12RB^{2}}w^{***}+(-\frac{(h^{3})^{*}}{12RB^{2}}+\frac{3B^{*}h^{3}}{12RB^{3}})w^{**}+(\frac{h}{R}+\frac{B^{*}(h^{3})^{*}}{12RB^{3}}+\frac{B^{**}h^{3}}{12RB^{3}}-\\
&\frac{3(B^{*})^{2}h^{3}}{12RB^{4}})w^{*}+\frac{h^{3}}{12R}w^{*''}-\frac{\nu(h^{3})^{*}}{12R}w^{''}+(\frac{h^{*}}{R}-\frac{R^{*}h}{R^{2}})w=-\frac{(1-\nu^{2})B}{E}q_{\beta}
\end{aligned} \tag{11'}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{12\boldsymbol{\nu}Bh}{R}u^{'}-\frac{12h}{R}v^{*}-\frac{h^{3}}{B^{3}}w^{****}+(\frac{-2(h^{3})^{*}}{B^{3}}+\frac{6B^{*}h^{3}}{B^{4}})w^{***}+(\frac{-(h^{3})^{**}}{B^{3}}+\frac{7B^{*}(h^{3})^{*}}{B^{4}}+\\
&\frac{4B^{**}h^{3}}{B^{4}}-\frac{15(B^{*})^{2}h^{3}}{B^{5}})w^{**}-2\frac{h^{3}}{B}w^{**''}+[\frac{B^{*}(h^{3})^{**}}{B^{4}}+\frac{2B^{**}(h^{3})^{*}}{B^{4}}-\frac{7(B^{*})^{2}(h^{3})^{*}}{B^{5}}+\\
&\frac{B^{***}h^{3}}{B^{4}}-\frac{10B^{*}B^{**}h^{3}}{B^{5}}+\frac{15(B^{*})^{3}h^{3}}{B^{6}}]w^{*}+(\frac{-2(h^{3})^{*}}{B}+\frac{2B^{*}h^{3}}{B^{2}})w^{*''}-Bh^{3}w^{''''}+\\
&(\frac{-\boldsymbol{\nu}(h^{3})^{**}}{B}+\frac{\boldsymbol{\nu}B^{*}(h^{3})^{*}}{B^{2}}-\frac{12Bh}{R^{2}})w=-\frac{12(1-\boldsymbol{\nu}^{2})B}{E}q_{n}
\end{aligned}$$

تمثل جملة المعادلات (’11) ثلاث معادلات تفاضلية جزئية بالنسبة للتشوهات $u\ (x, z)$, $v\ (x, z)$ $w\ (x, z)$. إن أمثال التشوهات ومشتقاتها توابع للمتحول x *فقط*.

إن الحصول على التشوهات $u\ (x, z)$, $v\ (x, z)$ $w\ (x, z)$ يمثـــل الحـــل لمجموعـــة المعادلات (’11). سوف نبحث عن هذا الحل بشكل سلسلة مثلثية على الشكل الآتـــي [6]:

$$\begin{aligned}
u(x,z) &= \sum_{n} u_{n}(x)\cos Nz \\
v(x,z) &= \sum_{n} v_{n}(x)\sin Nz \\
w(x,z) &= \sum_{n} w_{n}(x)\sin Nz
\end{aligned} \tag{12}$$

حيث: $\boldsymbol{n} = 1,3,.5..,\quad N = \frac{n\pi}{l}$

l- طول القشرية.

تعتمد معالجة الحمولات المطبقة على القشرية (حية، وزن ذاتي، ضغط هيدروستاتيكي ...) على افتراض أنها تابعة للمتحول x فقط. وضعت هذه الفرضية للتمكن من فصل المتغيرات. على سبيل المثال يعطى الوزن الذاتي على الشكل الآتي:

$$g = \gamma_1 h \qquad (13)$$

حيث: γ_1 الوزن الحجمي للبيتون.

h سماكة القشرية

بتحليل الوزن الذاتي إلى مركبتين، إحداهما باتجاه المماس للمحور β والثانية باتجاه الناظم الخارجي على السطح، نحصل على:

$$g_\beta = \frac{\gamma_1 h \frac{x}{p}}{\sqrt{1+(\frac{x}{p})^2}}$$

$$g_n = \frac{\gamma_1 h}{\sqrt{1+(\frac{x}{p})^2}} \qquad (14)$$

إذا نشرنا هذه المركبات بشكل سلسلة مثلثية جيبية (تحوي الجيوب فقط) يجري تمديدها بشكل عكسي على المجال $(0\ \ l, -)$. فإن ثوابت النشر ومركبات الحمولة [1] تساوي:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{lN}(1-\cos n\pi)$$

$$g_\beta = \frac{\gamma_1 h \dfrac{x}{p}}{\sqrt{1+(\dfrac{x}{p})^2}} \sum_n \frac{2}{Nl_0}(1-\cos n\pi)\sin Nz \qquad (15)$$

$$g_n = \frac{\gamma_1 h}{\sqrt{1+(\dfrac{x}{p})^2}} \sum_n \frac{2}{Nl_0}(1-\cos n\pi)\sin Nz$$

أما ضغط المياه الهيدروستاتيكي فتوجد له مركبة واحدة ناظمية على السطح المتوسط:

$$q_n = \gamma(t-y) \qquad (16)$$

هنا: γ- الوزن الحجمي للمياه

t - عمق المياه ويساوي الارتفاع الكلي للقناة المرفوعة.

y إحداثيات النقطة على المحور y

إذا نشرنا هذه المركبة بشكل سلسلة مثلثية جيبية نقوم بتمديدها بشكل أحادي على المجال $(-l,0)$، فإن ثوابت النشر ومركبة الحمولة[1] تساوي:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \qquad\qquad (17) \\ b_n &= \frac{2}{Nl}(1-\cos n\pi) \\ q_n &= \gamma(t-y)\sum_n \frac{2}{Nl}(1-\cos n\pi)\sin Nz \end{aligned}$$

إذا كانت للحمولة مركبة موازية لمماس خط الإحداثيات α ، فإنَّ هذه المركبة يجب أنْ تنشر في سلسلة مثلثية تجيبية لإمكانية فصل المتغيرات. ولكن في الحالات الغالبة $q_\alpha=0$ (لأن الحمولات في غالبيتها عمودية على المحور α ولا مركبة لهن عليه)، نبدل السلاسل (12,15) في المعادلات ('11). ولما كانت الأمثال المجهولة للتشوهات ومشتقاتها ومركبات الحمولات ليست تابعة للمتغير z أمكن أن يجري فصل تام

للمتغيرات ونحصل على n جملة معادلات، كل منها مكونة مــن ثــلاث معــادلات تفاضلية عادية بالنسبة ل w_n , u_n, v_n :

$$\begin{aligned}
&a_1 u_n^{**}(x) + a_2 u_n^{*}(x) + a_3 u_n(x) + a_4 v_n^{*}(x) + a_5 v_n(x) + a_6 w_n(x) = 0 \\
&a_7 u_n^{*}(x) + a_8 u_n(x) + a_9 v_n^{**}(x) + a_{10} v_n^{*}(x) + a_{11} v_n(x) + \\
&a_{12} w_n^{***}(x) + a_{13} w_n^{**}(x) + a_{14} w_n^{*}(x) + a_{15} w_n(x) = a_{23} \\
&a_{16} u_n(x) + a_{17} v_n^{*}(x) + a_{18} w_n^{****}(x) + a_{19} w_n^{***}(x) + \\
&a_{20} w_n^{**}(x) + a_{21} w_n^{*}(x) + a_{22} w_n(x) = a_{24}
\end{aligned} \tag{18}$$

هنا:

$a_1,...,a_{22}$ - الأمثال المجهولة للتشوهات ومشتقاتها.

a_{24}, a_{23} - الحدود الحرة للمعادلات الثانية والثالثة.

يجري التفتيش عن حل لهذه المعادلات على شكل توابع مثلثية. ونعتمد هنا في ذلــك على كتابة المشتق الأعلى رتبة على شكل سلسلة مثلثية. ويجري الحــصول علـــى المشتقات الأخرى بطريقة التكامل، وهذا أمر مقبول دوماً. بذلك سوف نحصل علـــى ثوابت التكامل غير المحدد، التي سوف تستعمل لتحقيق الــشروط الحديـــة للحافـــات الحرة. ولهذا سوف نفترض الآتي:

$$u_n^{**}(x) = \frac{1}{2}u_0 + \sum_m (u_1 \cos Mx + u_2 \sin Mx)$$

$$u_n^{*}(x) = \frac{1}{2}xu_0 + \sum_m \frac{1}{M}(u_1 \sin Mx - u_2 \cos Mx) + c_0$$

$$u_n(x) = \frac{1}{4}x^2 u_0 + \sum_m \frac{-1}{M^2}(u_1 \cos Mx + u_2 \sin Mx) + xc_0 + c_1$$

$$v_n^{**}(x) = \frac{1}{2}v_0 + \sum_m (v_1 \cos Mx + v_2 \sin Mx)$$

$$v_n^{*}(x) = \frac{1}{2}xv_0 + \sum_m \frac{1}{M}(v_1 \sin Mx - v_2 \cos Mx) + c_2$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2}x^2 v_0 + \sum_m \frac{-1}{M^2}(v_1 \cos Mx + v_2 \sin Mx) + xc_2 + c_3 \quad (19)$$

$$w_n^{****}(x) = \frac{1}{2}w_0 + \sum_m (w_1 \cos Mx + w_2 \sin Mx)$$

$$w_n^{***}(x) = \frac{1}{2}xw_0 + \sum_m \frac{1}{M}(w_1 \sin Mx - w_2 \cos Mx) + c_4$$

$$w_n^{**}(x) = \frac{1}{4}x^2 w_0 + \sum_m \frac{-1}{M^2}(w_1 \cos Mx + w_2 \sin Mx) + xc_4 + c_5$$

$$w_n^{*}(x) = \frac{1}{12}x^3 w_0 + \sum_m \frac{-1}{M^3}(w_1 \sin Mx - w_2 \cos Mx) + \frac{1}{2}x^2 c_4 + xc_5 + c_6$$

$$w_n(x) = \frac{1}{48}x^4 w_0 + \sum_m \frac{1}{M^4}(w_1 \cos Mx + w_2 \sin Mx) + \frac{1}{6}x^3 c_4 + \frac{1}{2}x^2 c_5 + xc_6 + c_7$$

هنا : $m = 1,2,..$

$$M = \frac{m\pi}{x_0}$$

x_0 - إحداثيات حافة القشرية.

يبلغ عدد الأمثال المجهولة لحدود السلاسل المثلثية وثوابت التكامل في هذه الـــسلاسل $3 + 6m + 8$ وهي الآتية:

$$u_0, u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{1m}, u_{2m}$$

$$v_0, v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{1m}, v_{2m}$$

$$w_0, w_{11}, w_{21}, \ldots, w_{1m}, w_{2m}$$

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$$

نضع السلاسل (19) في مجموعة المعادلات التفاضلية العادية (18) ونعيـــد ترتيـــب المجاهيل كالآتي:

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, u_0, v_0, w_0, (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)_m]_n \quad (20)$$

نحصل على n جملة، كل واحدة منها من ثلاث معادلات بالنسبة للمجاهيل الآنفة الذكر (20). إن أمثال المجاهيل في كل معادلة من الجملة هي الآتية:

$d_0,..,d_{10},d_{11,m},..,d_{16,m}$ – أمثال المجاهيل في المعادلة الأولى.

$f_0,..,f_{10},f_{11,m},..,f_{16,m}$ – أمثال المجاهيل في المعادلة الثانية.

$g_0,..g_{10},g_{11,m},..,g_{16,m}$ – أمثال المجاهيل في المعادلة الثالثة.

إذا جرى اختيار المجاهيل ووضعها في المعادلات، فإنَّ كل معادلة سوف تعطي بعض الانحراف، ويساوي هذا الانحراف الصفر إذا كان اختيار المجاهيل مساوياً للقيمة الحقيقية لحلول تلك المعادلات. سوف نحدد ذلك من تعامد الانحراف مع توابع أساسية. إذا كانت $\{\varphi_k\}$ جملة أساسية ومتعامدة فيما بينها، وكان $f(x)$ تابعاً مستمراً و متعامداً مع كل من حدود $\{\varphi_k\}$ أي أن :

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = 0 \qquad (21)$$

$$k = 1,2,...$$

فإن: $f(x)=0$.

ولهذا سوف نأخذ بمنزلة الجملة $\{\varphi_k\}$ التوابع المثلثية الآتية:

$$1,...,\cos Kx, \sin Kx \qquad (22)$$

حيث : $K = \dfrac{k\pi}{x_0} \quad k = 1,2,...$

سوف نقوم بعد تعويض (19) في (18) بضرب كل من المعادلات الثلاث الناتجة، بكل من $\{\varphi_k\}$ ونكامل على المجال $[-x_0, x_0]$. وهكذا سوف نحصل على مجموعة من $3+6k$ معادلة جبرية خطية بالنسبة للأمثال المجهولة للسلاسل المثلثية.

يمكن تحديد ثوابت المجموعة أو عناصر مصفوفة الحل كالآتي:

من أجل المعادلة الأولى:

$$D_{i,k} = \int_{-x_0}^{x_0} d_i \varphi_k dx \qquad (23)$$

من أجل المعادلة الثانية:

$$F_{i,k} = \int_{-x_0}^{x_0} f_i \varphi_k dx \qquad (24)$$

من أجل المعادلة الثالثة:

$$G_{i,k} = \int_{-x_0}^{x_0} g_i \varphi_k dx \qquad (25)$$

من أجل الحد الثابت في المعادلة الثانية:

$$q_{\beta,k} = \int_{-x_0}^{x_0} a_{23} \varphi_k dx \qquad (26)$$

من أجل الحد الثابت في المعادلة الثالثة:

$$q_{n,k} = \int_{-x_0}^{x_0} a_{24} \varphi_k dx \qquad (27)$$

يمكن تحديد تلك العناصر بالطرائق العددية المعروفة في التكامل المحدود. باستعمال المعادلات الآنفة الذكر، يمكن أن نحدد عناصر مصفوفة من $3+6k$ معادلة جبرية خطية.

الشروط الحدية:

يجب أن نحدد الشروط الحدية عند حافات القشرية حيث $x = x_0$ و $x = -x_0$. هناك العديد من الاحتمالات للشروط الحدية[5] . على سبيل المثال إن الشروط الحدية من أجل استناد مفصلي على الشكل الآتي:

$$M_2 = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ w = 0.$$

ويمكن التعبير عن الشروط الحدية من أجل حافة حرة بغياب القوى والعزوم على هذه الحافة. سوف نتابع مع هذه الحالة، ولهذا فإنّ الشروط الحدية في نظريـــة القـــشريات لهذه الحالة على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &N_2 = 0 \\ &S + \frac{H}{R_1} = 0 \\ &Q_2 + \frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \\ &M_2 = 0 \end{aligned} \qquad (28)$$

الشرط الحدي الأول :

$$N_2 = 0 \qquad (29)$$

من المعادلات (10):

$$N_2 = K(\nu u' + \frac{v^*}{B} + \frac{w}{R}) = 0$$

نبدل في هذه المعادلة التشوهات ومشتقاتها بتعابيرها من المعـــادلات (12)، نحـــصل على فصل كامل للمتغيرات على شكل n جملة كل منها من معادلة تفاضلية عاديـــة واحدة (سوف نقوم بإسقاط الدليل n):

$$-\nu Nu(x) + \frac{1}{B}v^*(x) + \frac{1}{R}w(x) = 0$$

نبدل في هذه المعادلة التشوهات ومشتقاتها بتعابيرها من المعادلات (19) ونقوم ببعض الترتيبات فنجد:

$$\begin{aligned} &-\nu Nxc_0 - \nu Nc_1 + \frac{1}{B}c_2 + \frac{1}{6R}x^3c_4 + \frac{1}{2R}x^2c_5 + \frac{1}{R}xc_6 + \frac{1}{R}c_7 - \\ &\frac{\nu N}{4}x^2u_0 + \frac{1}{2B}xv_0 + \frac{1}{48R}x^4w_0 + \sum_m[\frac{\nu N}{M^2}u_1\cos Mx + \frac{\nu N}{M^2}\sin Mx + \\ &\frac{1}{BM}v_1\sin Mx - \frac{1}{BM}\cos Mx + \frac{1}{RM^4}w_1\cos Mx + \frac{1}{RM^4}\sin Mx] = 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

نبدل في هذه المعادلة $x=-x_0$ فنحصل على المعادلة الجبرية الأولى من أجل حافة القشرية، من أجل $x=x_0$، وبطريقة مماثلة نحصل على المعادلة الجبرية الثانية من أجل الحافة الثانية للقشرية.

الشرط الحدي الثاني:

$$S+\frac{H}{R_1}=0 \qquad (31)$$

هنا : $R_1=\infty$

من (10) $$S=\frac{(1-\nu)K}{2}\left(\frac{u_0}{B}+v'\right)=0$$

بطريقة مماثلة لما حصل مع الشرط الحدي الأول، يمكن فصل المتغيرات والحصول على:

$$\frac{1}{B}u^*(x)+Nv(x)=0$$

وبتبديل التشوهات ومشتقاتها في هذه المعادلة بتعابيرها من (19)، وبعد القيام ببعض التنسيق نجد:

$$\frac{1}{B}c_0+Nxc_2+Nc_3+\frac{1}{2B}xu_0+\frac{N}{4}x^2v_0+\sum_m\left[\frac{1}{BM}u_1\sin Mx-\frac{1}{BM}*\right. \qquad (32)$$
$$\left.u_2\cos Mx-\frac{N}{M^2}v_1\cos Mx-\frac{N}{M^2}v_2\sin Mx\right]=0$$

نبدل في هذه المعادلة (32) $x=-x_0$ فنحصل على المعادلة الجبرية الثالثة من أجل حافة القشرية. وبطريقة مماثلة من أجل $x=x_0$ نحصل على المعادلة الجبرية الرابعة من أجل الحافة الثانية للقشرية.

الشرط الحدي الثالث:

$$Q_2 + \frac{1}{A}\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \qquad (33)$$

هنا : $A = 1$

يمكن تحديد Q_2 من المعادلة الرابعة من (4) ومن المعادلة (33) نحصل على الصيغة:

$$\frac{\partial M_2}{B\partial x} + 2\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

نبدل في هذه المعادلة العزوم بتعابيرها في المعادلة (10) فنجد:

$$\frac{1}{B}[D(-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} - \nu w^{''})]^* + 2[-D(1-\nu)\frac{w^{*'}}{B} = 0$$

نقوم بكل الاشتقاقات وببعض الترتيبات نحصل على:

$$-\frac{h^3}{B^3}w^{***} + (\frac{-(h^3)^*}{B^3} + \frac{3h^3 B^*}{B^4})w^{**} + (\frac{(h^3)^* B^*}{B^4} + \frac{h^3 B^{**}}{B^4} - \frac{3h^3 (B^*)^2}{B^5})w^* - (2-\nu)\frac{h^3}{B}w^{*''} - \frac{\nu (h^3)^*}{B}w^{''} = 0$$

بطريقة مماثلة لما حصل مع الشرط الحدي الأول، يمكن فصل المتغيرات والحصول على :

$$-\frac{h^3}{B^3}w^{***} + (\frac{-(h^3)^*}{B^3} + \frac{3h^3 B^*}{B^4})w^{**} + (\frac{(h^3)^* B^*}{B^4} + \frac{h^3 B^{**}}{B^4} - \frac{3h^3 (B^*)^2}{B^5})w^* + (2-\nu)\frac{h^3}{B}N^2 w^* + \frac{\nu (h^3)^*}{B}N^2 w = 0 \qquad (34)$$

بتبديل التشوهات ومشتقاتها في هذه المعادلة بتعابيرها من (19)، وبعد القيام ببعض التنسيق، نبدل في هذه المعادلة $x = -x_0$ فنحصل على المعادلة الجبرية الخامسة من أجل الحافة الأولى القشرية. وبطريقة مماثلة من أجل $x = x_0$ نحصل على المعادلة الجبرية السادسة من أجل الحافة الثانية للقشرية.

المعادلة الحدية الرابعة:

$$M_2 = 0 \qquad (35)$$

من (10) عندنا :

$$D(-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} - \nu w^{"}) = 0$$

بفصل المتغيرات نحصل على:

$$-\frac{w^{**}}{B^2} + \frac{B^* w^*}{B^3} + \nu N^2 w = 0$$

بتبديل التشوهات ومشتقاتها في هذه المعادلة بتعابيرها من (19) وبعد القيام ببعض التنسيق، نبدل في هذه المعادلة $x = -x_0$ فنحصل على المعادلة الجبرية السابعة من أجل حافة القشرية. وبطريقة مماثلة من أجل $x = x_0$ نحصل على المعادلة الجبرية الثامنة من أجل الحافة الثانية للقشرية.

مما سبق نكون قد حصلنا على ثماني معادلات من الشروط الحدية بالإضافة إلى $3 + 6k$ معادلة من التكامل المحدود. ولهذا فإنَّ العدد الكلي للمعادلات يساوي $3 + 6k + 8$. إن العدد الكلي للمجاهيل في المجموعة (20) يساوي $3 + 6m + 8$ ، ولهذا إذا أخذنا $m = k$ فسوف يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل. وبحل جملة المعادلات الجبرية التي حصلنا عليها نجد المركبة الأولى من n مركبة للحل، وبطريقة مماثلة نجد بقية مركبات الحل لكل قيم n. ويمكن تحديد التشوهات ومشتقاتها الآتية (19) :

$$[u^*(x), u(x), v^*(x), v(x), w^{**}(x), w^*(x), w(x)]_n \qquad (36)$$

وكذلك يمكن تحديد العلاقات المطلوبة للتشوهات ومشتقاتها (12) بالعلاقات الآتية:

$$u(x,z) = \sum_n u_n(x) \cos Nz$$
$$u^*(x,z) = \sum_n u^*{}_n(x) \cos Nz$$
$$u^{'}(x,z) = \sum_n - N u_n(x) \sin Nz$$
$$v(x,z) = \sum_n v_n(x) \sin Nz$$
$$v^*(x,z) = \sum_n v^*{}_n(x) \sin Nz$$
$$v^{'}(x,z) = \sum_n N v_n(x) \cos Nz$$
$$w(x,z) = \sum_n w_n(x) \sin Nz$$
$$w^{**}(x,z) = \sum_n w^{**}{}_n(x) \sin Nz$$
$$w^*(x,z) = \sum_n w^*{}_n(x) \sin Nz$$
$$w^{*'}(x,z) = \sum_n N w^*{}_n(x) \cos Nz$$
$$w^{''}(x,z) = \sum_n - N^2 w_n(x) \sin Nz$$

ومن المعادلات (10) يمكن تحديد القوى والعزوم في القشرية:

$$N_1, N_2, S, M_1, M_2, H \qquad (38)$$

مثال:

قناة ري مرفوعة ذات مقطع قطعي مكافئ ومتغيرة السماكة

تستعمل أقنية الري المرفوعة لإيصال المياه إلى الحقول. وهي تتكون من قطع بيتونية مسلحة مسبقة الصنع (شكل 1) سوف نطلق على القطعة منها اسم فقرة. وهي مرتكزة من جانبيها على أعمدة. وتمتاز بالكتامة، ولاقت انتشاراً واسعاً في المناطق المعقدة طوبوغرافياً وجيولوجياً، كأنْ تكون المنطقة المروية عالية النفاذية، أو ذات

سفوح غير مستقرة، أو ذات تركيب هيدروجيولوجي غير مناسب، مثل المناطق الجبسية.

لإنشاء مشروع منخفض التكاليف، يجب أن نزيد أطوال فقرات الاقنية المرفوعة لنقلل من عدد الركائز. وهذا سوف يزيد من عزم الانعطاف في وسط فقرة القناة، لأنها تعمل في الاتجاه الطولي كجائز. إن زيادة العزم يتطلب زيادة عزم العطالة، وبتعبير آخر زيادة عمق الفقرة. ولكن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة عزم الانعطاف في الاتجاه العرضي، لأنَّ فقرة القناة تعمل في هذا الاتجاه كظفر، مما يتطلب زيادة السماكة، وبالتالي زيادة الوزن. ولهذا فإن السؤال المهم هو: كيف نحدد النسبة الأفضلية بين طول فقرة القناة وعمقها؟. يمكن أن نحلل ذلك إذا كان لدينا حل دقيق لفقرة القناة كمنشاة ثلاثية الأبعاد أي كقشرية.

نستخدم هنا الطريقة التي جرى شرحها آنفاً للحصول على حل لفقرة قناة ري مرفوعة ذات مقطع قطعي مكافئ.

إن المعادلة (1) من أجل القطع المكافئ على الشكل الآتي:

$$y = \frac{1}{2p}x^2 \qquad (39)$$

حيث: p ثابت القطع المكافئ، وتتراوح قيمته لأقنية الري المرفوعة بين 0.2 و 0.35 .

إن عوامل المعادلة التربيعية الأولى للسطوح (2) من أجل السطوح الاسطوانية تساوي :

$$A = 1$$

$$B = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \qquad (40)$$

هنا: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}x$

(B،A للقناة نصف الدائرية – const)

إن نصف قطر التقوس الرئيسي الأول للسطح باتجاه خطوط الإحداثيات α يساوي:

$$R_1 = \infty$$

إن نصف قطر التقوس الرئيسي الثاني للسطح باتجاه خطوط الإحـداثيات β يـساوي :(3)

$$R_2 = R = \frac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = (1+\frac{x^2}{p^2})^{\frac{3}{2}} p \qquad (41)$$

هنا: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}$

(R للقناة نصف الدائرية– const)

سوف نفترض المعطيات الآتية لفقرة القناة: طول الفقرة l=6m. السماكة فـي القعـر h=0.065m السماكة عند الحافة h=0.055m، ولهذا فإنَّ تغيـر الـسماكة λ=0.01. عمق المقطع العرضي للفقرة t=1m . عرض الفقرة عند مستوى الحافـة يـساوي 1.674m. عامل المرونة (عامل يونـغ) E =21.4x10^9Pa. وعامـل بواسـون ν =0.17. و ثابت القطع المكافئ p=0.35.

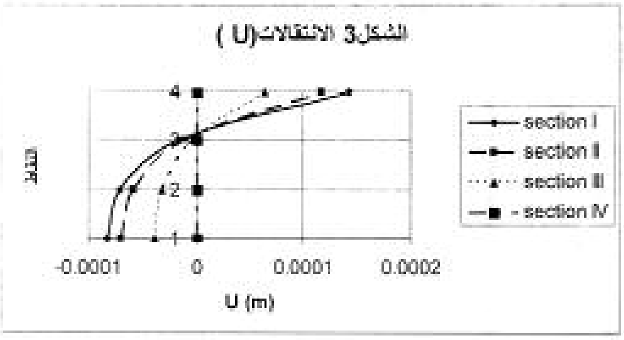
جرى تحديد النتائج الحسابية للانتقالات والقوى والعزوم في أربعة مقاطع: I-II-III-IV، وهي على أبعاد: z = 0,1, 2, 3 m كما جرى الحساب في كل مقطع في أربع نقاط : 1-2-3-4 ، على أبعاد x = 0, 0.278, 0.556, 0.8367m

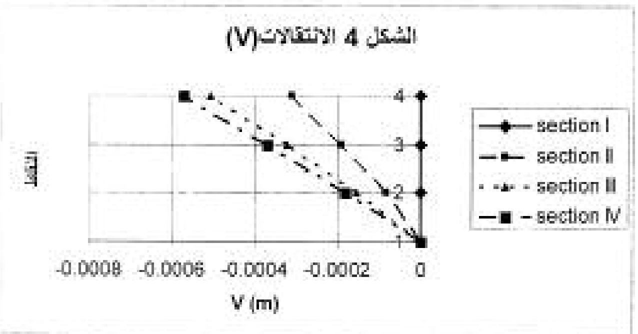
إن النتائج الحسابية ظاهرة على الأشكال 3–4–...13. ومنها يمكـن التوصـل إلـى الملاحظات الآتية:

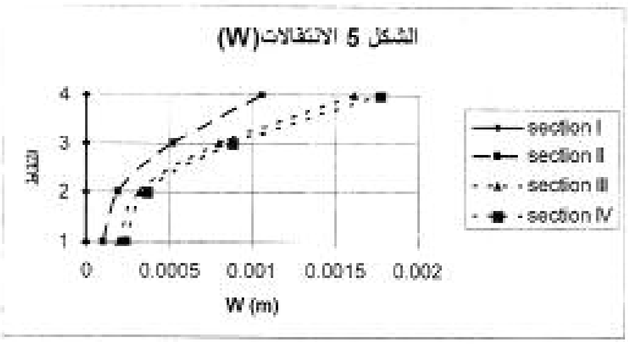
- إن الانتقالات u المماسية للخط α (الشكل 3) تنعدم في المقطع الرابع حيث z =3m وهي سلبية عند القعر وإيجابية عند الحافة الحرة لمقطع القناة.

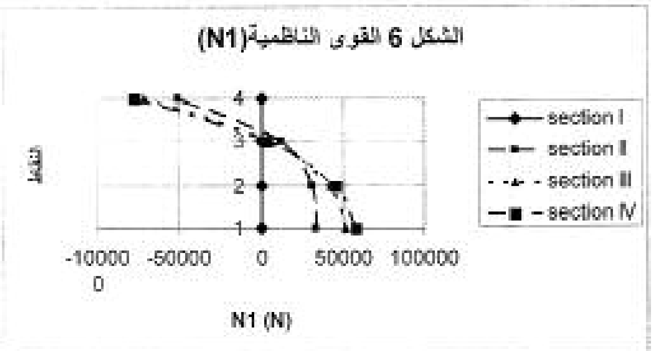
- إن الانتقالات v المماسية للخط β (الشكل 4) تنعدم عند قعر القناة حيث $x=0$.
- إن القوى الناظمية N1 (الشكل 6) إيجابية عند قمة القناة وسلبية عند القعر وتنعدم عند حافة الارتكاز.
- إن قوى القص S (الشكل 8) تنخفض باتجاه منتصف المجال وتنعدم في المقطـــع الرابع وعند الحافة الحرة وعند القعر في كل المقاطع حيث x =0.
- إن عزوم الفتل H (الشكل 11) تنخفض باتجاه منتصف المجال وتنعدم في المقطـــع الرابع وعند القعر في كل المقاطع حيث x =0 .

تبرهن هذه الملاحظات وغيرها أن النتائج منطقية. طبعاً لم نضع هدفنا إجراء تحليـــل كامل للحالة الإجهادية، وتأثير تغيرات عناصر القناة عليها، إن ذلك موضـــوع عمـــل آخر.

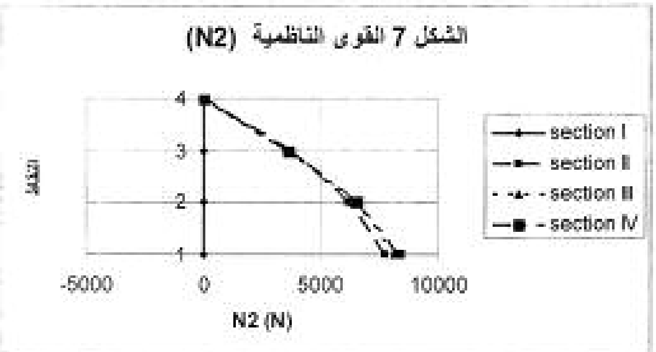

الشكل3 الانتقالات(U)
4
3
2
1
section I
section II
section III
section IV
-0.0001
0
0.0001
0.0002
U (m)


الشكل 4 الانتقالات(V)
4
3
2
1
section I
section II
section III
section IV
-0.0008
-0.0006
-0.0004
-0.0002
0
V (m)

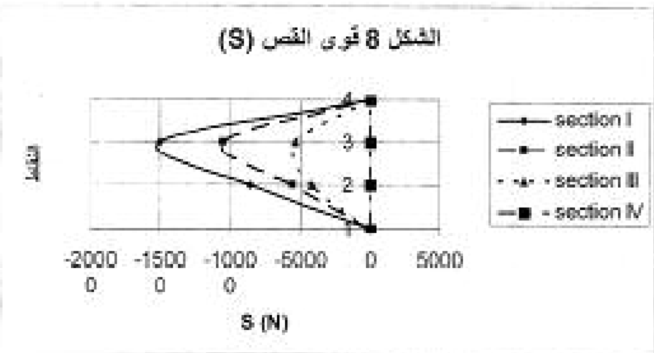

الشكل 5 الانتقالات(W)
4
3
2
1
section I
section II
section III
section IV
0
0.0005
0.001
0.0015
0.002
W (m)



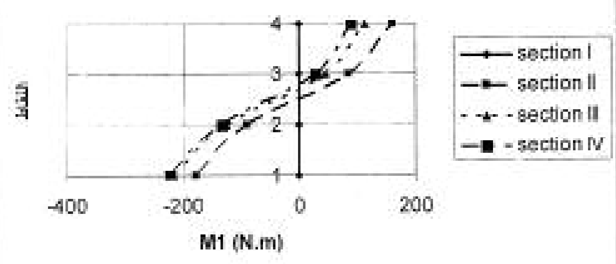
الشكل 6 القوى الناظمية(N1)



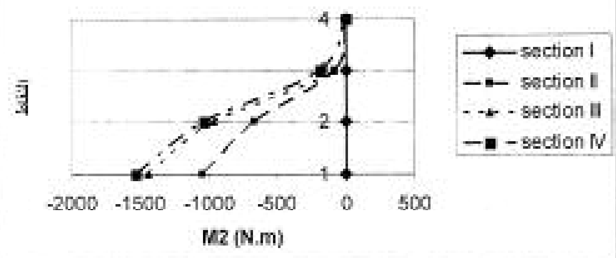
الشكل 7 القوى الناظمية (N2)



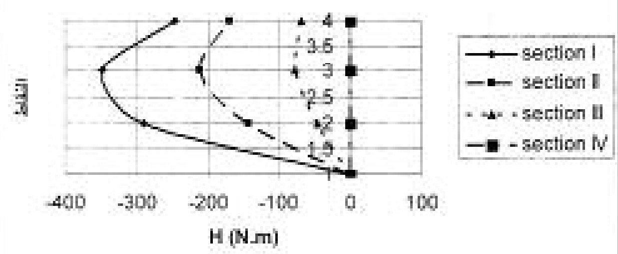
الشكل 8 قوى القص (S)



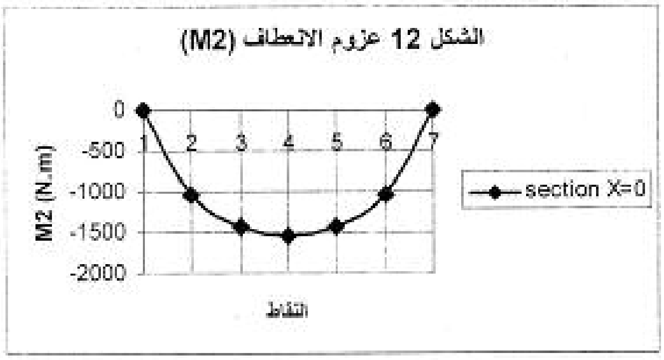
الشكل 9 عزوم الانعطاف (M1)



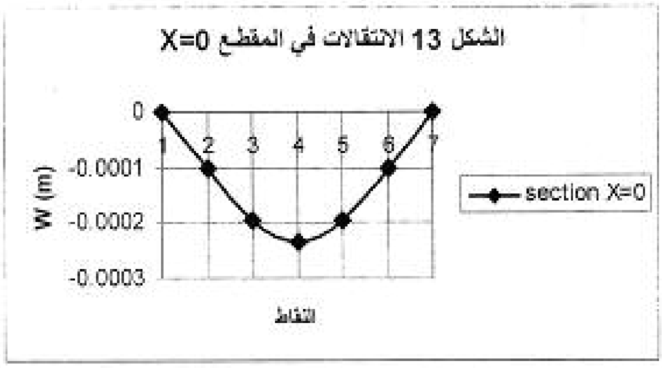
الشكل 10 عزوم الانعطاف (M2)



الشكل11 عزوم الفتل (H)



الشكل 12 عزوم الانعطاف (M2)



الشكل 13 الانتقالات في المقطع X=0

الخلاصة:

جرى تطوير حل لقشرية اسطوانية ذات مقطع من الدرجة الثانية أو الرابعة. جـــرى التطوير اعتماداً على النظرية العزمية لنظرية القشريات دون إهمـــال أي حـــد مـــن حدودها. يمكن تطبيق هذه الطريقة على كل القشريات ذوات السطح المتوسط المعطي كتابع لمحور إحداثيات واحد، ويفترض أن الحمولات تابعة أيضاً لذلك المحور. يمكن استعمال هذه الطريقة لإيجاد حل للقشريات الاسطوانية ذات السماكات المتغيرة، وهذا يؤدي إلى تصاميم أكثر انسجاماً مع الحالة الإجهادية. كما يمكن استخدام هذه الطريقة في إيجاد حلول للقشريات الدورانية، مثل القشريات المخروطية والقطعيـــة المكافئـــة الدورانية.

تقدير: يقدر الباحث الدعم الذي لقيه من جامعة جورج واشنطون خلال فترة إجازته العلمية فيها.

المراجع

[1]- Bronshtein, I. N. Semendyayev, K. A. (1998) Handbook of Mathematics. Springer, Berlin.
[2]- Gol'denweizer, A.L. (1953) Theory of thin elastic shells, GITTL, Moscow.
[3]- Husien, A. (1970). Calculation of Arch Dams as a Shell of Revolution. Ph.D. Thesis, Moscow Civil Engineering Institute.
[4]- أ. د. عبد الرزاق الحسين: تطبيق نظرية القشريات في حساب الاقنية المرفوعة نصف الدائرية، مجلة باسل الأسد للعلوم الهندسية العدد 13– 2001.
[5]- Novozhilov, V. V. (1964). Thin Shell Theory. Noordhoof, The Netherlands.
[6]- Timoshenko, S Woinowsky-Kriger, S. (1987) Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, inc. New York.
[7]- Vlasov, V. Z., (1964) General theory of shells and its applications in engineering. NASA.

ورود البحث إلى مجلة جامعة دمشق2004/12/20.