طريقة بديلة لحل مسألة التقويم
(التقاطع الخلفي)

الدكتور المهندس عبد الرزاق عجاج[1]

الملخص

تكمن أهمية المسألة القديمة (مسألة التقويم) المطروحة في كونها أساساً في أعمال الري والطرق والمنشآت الهندسية، إذْ يُسعى إلى إدخال نقاط جديدة في شبكة جيوديزية منشورة على رقعة محيطة بموقع العمل أو داخله. يهدف هذا البحث إلى تطوير هذه الطريقة القديمة لتجاوز صعوبة الوقوع على الدائرة الخطرة والمعروفة في هذه المسألة.

نظراً إلى التطور الحاصل باستخدام تقنيات الحديثة في الأجهزة المساحية فقد تمَّ تطوير هذه الطريقة بحساب تقاطع دائرتين (إيجاد معادلتي الدائرتين) كل منهما تمر من النقطة المجهولة وبنقطتين معلومتين، ومن ثم حل جملة معادلتين من الدرجة الثانية، حيث تتضمن هاتان المعادلتان إحداثيات النقطة المجهولة (x , y). اعتمد في هذا البحث أيضاً على استنتاج خوارزمية سهلة وبسيطة يمكن استخدامها في حل مسألة التقويم وحساب الشبكات الجيوديزية وبرمجتها أيضاً في الأجهزة المساحية المتطورة (Total Station)، وذلك بعد أن جرى تطبيقها عملياً ومقارنة النتائج بالطرائق القديمة المعروفة، وتقييم دقة إحداثيات النقطة المجهولة.

كلمات مفتاحية: التقاطع، التقويم، الدائرة الخطرة، خطأ متوسط التربيع، الدقة.

[1] قسم الهندسة الطبوغرافية – كلية الهندسة المدنية – جامعة دمشق.

مقدمة:

إن التطور الذي طرأ على أجهزة القياس الإلكترونية جعل استخدامها شاملا وبدقة عالية لتنفيذ الأعمال المساحية والجيوديزية. تعدُّ أجهزة المحطة الكاملة (Total Station) من أحدث الأجهزة المساحية الأرضية التي أنتجت في المدة الأخيرة، وهي نتاج التطور التقني في علوم الإلكترونيات والحواسيب وتصنيع الأجهزة المساحية الحديثة حيث أصبحت تستخدم في معظم الأعمال الهندسية المدنية المختلفة كأعمال الري والطرق والمنشآت الهندسية المختلفة [1].

إن التطور الحاصل في الأجهزة المساحية لا بد أن يرافقه تغير جذري في تقنية تنفيذ الأعمال الجيوديزية، ولاسيَّما أن هذه الأجهزة الحديثة الكاملة تتضمن تقنية عالية في الرصد والحساب، إذْ يمكن من خلالها رصد الاتجاهات الأفقية والزوايا الشاقولية وتخزينها ضمن ذاكرة داخلية أو ذاكرة خارجية ومعالجتها عن طريق برامج مساحية مختلفة كبرنامج حساب مسألة التقاطع والتقويم، وبرنامج حساب مضلع، وبرنامج توقيع النقاط على الطبيعة، وبرنامج حساب الإحداثيات المستوية للنقاط المرصودة.

إن معظم الأعمال المساحية المتمثلة بتعيين إحداثيات نقطة ما من خلال قياسات زاوية أو خطية استناداً إلى نقاط معلومة الإحداثيات على الطبيعة (ما يطلق عليه تسمية التقاطعات) يعتمد على تعيين معادلتي مستقيمين يمران بالنقاط المعلومة الإحداثيات، وهي محطات الرصد أو نقاط الربط حيث يتقاطع هذان المستقيمان في النقطة المجهولة الإحداثيات. تحسب إحداثيات نقطة التقاطع وفق طرائق مختلفة كالتقاطع الزاوي الأمامي أو الخلفي [2].

تُعدُّ مسألة التقويم أساسية في تنفيذ الأعمال المساحية في مجال الري والطرق وفي حساب الإحداثيات التقريبية لنقاط شبكة المثلثات لتعديلها وفق مبدأ المربعات الصغرى. تهدف هذه الدراسة إلى تطوير الطريقة القديمة لتجاوز صعوبة الوقوع على الدائرة الخطرة المعروفة في هذه المسألة. تعتمد الحلول السابقة والمقدمة من قبل الرياضيين والجيوديزيين على الوقوف فوق النقطة المجهولة وقياس الاتجاهات الأفقية لثلاث نقاط معلومة الإحداثيات مسبقاً قياساً تاماً، ومن خلال حسابات وسيطية ترد مسألة التقاطع الخلفي إلى تقاطعين أماميين؛ أحدهما: يسعى في تعيين إحداثيات النقطة المجهولة، والآخر يكون تحققاً من صحة الحساب الأول. يعرض هذا البحث كيفية إيجاد معادلتي دائريتين تمر كلاهما في النقطة المجهولة وبالنقطتين المعلومتين، إذْ يمكن من حل هاتين المعادلتين الحصول على إحداثيات النقطة المجهولة من خلال خوارزمية بسيطة يمكن استخدامها وبرمجتها في الأجهزة المساحية الكاملة.

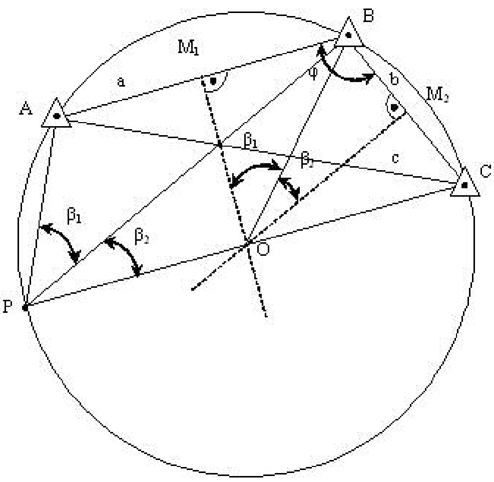
الخوارزمية المقترحة لحل مسألة التقويم:

يمكن تعيين أي نقطة مجهولة وحساب إحداثياتها بالتمركز بالجهاز فوقها وقياس الزوايا الأفقية التي تصنعها الاتجاهات من النقطة المجهولة إلى النقاط الأخرى المعلومة الإحداثيات. يلزم لتعيين نقطة مجهولة P تعييناً وحيداً ثلاث نقاط A, B, C المعلومة الإحداثيات وقياس الزاويتين الأفقيتين $\beta 1, \beta 2$ كما في الشكل (1). إن المحل الهندسي للنقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة ضمن زاوية ثابتة هو قوس من دائرة يسمى بالقوس المحدد للزاوية. فمثلاً النقطة P واقعة من جهة على القوس المحدد للزاوية $\beta 1$ الذي هو المحل الهندسي للنقاط التي تُرى منها القطعة AB، ومن جهة ثانية واقعة على القوس المحدد للزاوية $\beta 2$

الذي هو المحل الهندسي للنقاط التي ترى منها القطعة BC. إن هذين القوسين يتقاطعان في النقطة B و P، حيث يمكن أن تنشأ بطريقة هندسية بسيطة النقطة P تخطيطياً ومن ثَمَّ حساب إحداثياتها كما هو مبين في الشكل (3). إن حساب إحداثيات نقطة معينة بطريقة التقويم يتم بالطرائق الآتية: طريقة غوص أو طريقة بوتينوت (Gauss or Pothenot)، طريقة كاسيني (Cassini)، طريقة التقويم الإيطالي والطريقة التحليلية أو طريقة الأقواس المحددة [6، 3].

إن أهم عيوب مسألة التقويم هو خطورة تركيز الجهاز بالقرب من الدائرة الخطرة، أو بعبارة أخرى حينما يقترب الرباعي ABCP من الرباعي التام في وضع كهذا لا توفر طريقة الحساب الدقة المطلوبة لأن التقويم يؤول إلى تقاطع قوسين محددين للزاويتين يقتربان وضع التطابق، وعليه فمن المفيد أن يتم تقاطع هذين القوسين بزاوية قريبة من الزاوية القائمة، ويجب هنا التمييز بين تقاطع قوسين وتقاطع اتجاهين مرصودين. إذا وقعت نقاط الربط (النقاط المعلومة الإحداثيات) والنقطة المجهولة (المطلوب تعيينها) على قوس من دائرة واحدة يظهر عدم تعيين للنقطة المجهولة، لأن أي نقطة منه تصلح أن تكون حلاً (أي أن كل نقطة من محيط هذه الدائرة تمثل النقطة المجهولة) ومن ثَمَّ فإن لدينا بهذه الحالة عدم تعيين.

يطلق على الدائرة التي تقع النقاط الأربع على محيطها (ثلاث نقاط معلومة ونقطة مجهولة) اسم الدائرة الخطرة وللابتعاد ما أمكن من وقوع النقاط الأربعة على محيط الدائرة الخطرة، يجب أن تقع النقطة المطلوب تعيينها على مسافة مقبولة من محيط الدائرة المارة من نقاط الربط (A, B, C) أو داخل الدائرة أو خارجها [4، 5]. يبيّن الشكل (1) أنه إذا كانت النقطة المجهولة واقعة على محيط هذه الدائرة تبقى مسألة قياس الزاويتين مسألة عديمة المعنى لأن هاتين الزاويتين يمكن حسابهما مسبقاً.



شكل (1): الدائرة الخطرة في مسألة التقويم

إذْ إنَّ:

A, B, C نقاط الربط المعلومة الإحداثيات.

a, b, c المسافات بين نقاط الربط.

β1, β2 الزوايا المقيسة من النقطة المجهولة P إلى النقاط المعلومة الإحداثيات.

من المعلوم أن كلاً من الزاويتين β_1 و β_2 تساوي نصف الزاوية المركزية من الدائرة الموافقة، حيث مركز كل دائرة من دائرتي التقاطع المحدد للنقطة المجهولة P ينتج عن تقاطع المستقيم المتوسط للقطعة المستقيمة AB مع العمود المقام في النقطة A على المماس من هذه النقطة الذي يحصر الزاوية المحيطية β_1، فإذا كانت النقطة P واقعة على الدائرة الخطرة يكون:

$$R = \frac{a}{2\sin\beta_1} = \frac{b}{2\sin\beta_2} \qquad (1)$$

وأيضاً $\beta 1 + \beta 2 + \varphi = 180^o$ كما هو معلوم في شكل رباعي تام يقبل الرسم على محيط دائرة معينة. إن

مجموع زوايا الشكل الرباعي OM_1BM_2 يساوي 360° أي:

$$\beta 1 + \beta 2 + \varphi + 180^\circ = 360^\circ$$

حيث φ الزاوية الداخلية بين الأطوال الواصلة بين نقاط الربط A, B, C. ومنه:

$$\beta_2 = 180^\circ - \varphi - \beta_1 \quad (2)$$

ينتج بتعويض (2) في (1) العلاقة الآتية :

$$a\sin(180^\circ - \varphi - \beta_1) = b\sin\beta_1 \quad (3)$$

يمكن كتابتها بالشكل:

$$a\sqrt{1-\sin^2\beta_1}\sin\varphi = (b - a\cos\varphi)\sin\beta_1 \quad (4)$$

بتربيع طرفي العلاقة (4) يكون:

$$(a^2 - 2ab\cos\varphi + b^2)\sin^2\beta_1 = a^2\sin^2\varphi \quad (5)$$

ومنه

$$\sin\beta_1 = \frac{a\sin\varphi}{C} \qquad (6)$$

إذْ

$$C^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\varphi$$

نحصل بشكل مشابه على علاقة مماثلة بالنسبة للزاوية β_2 بالشكل الآتي:

$$\sin\beta_2 = \frac{b\sin\varphi}{C} \qquad (7)$$

يمكن الحصول على نصف قطر الدائرة الخطرة من العلاقتين (6) و (7) والمعادلة (1) كما يأتي:

$$R = \frac{C}{2\sin\varphi} \qquad (8)$$

بتحليل هذه العلاقة نجد أنه في حال تسعى الزاوية φ لتقترب من 180° (φ ← 180°) فإن نصف القطر يسعى إلى اللانهاية (R ← ∞)، ومن ثَمَّ يصبح احتمال حل مسألة التقويم بدقة مطلوبة ضعيفاً. إذا كانت φ ≈ 90° تكون قيمة R قريبة من قيمة الأطوال الواصلة بين النقطة المجهولة والنقاط المعلومة وبهذه الحالة يجب الاختيار المناسب لتوضع نقاط الربط.

إذا حُسب نصف القطر R من العلاقة (1) والزاوية

$$\beta_1 \approx \arcsin\frac{a\sin\varphi}{C} \quad \text{أو} \quad \beta_2 \approx \arcsin\frac{b\sin\varphi}{C}$$

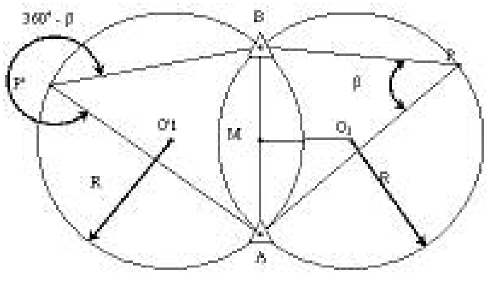
عندئذٍ يمكن بهذه الحالة الابتعاد عن استخدام طريقة التقاطع الزاوي الخلفي واستخدام مجموعة مركبة من نقاط الربط (طريقة التقاطع المركب).

تقاس في المساحة كما هو معروف الزوايا الواقعة على يمين القطعة AB أو يسارها، وهذا ما يفيد عند تصميم برنامج حساب إحداثيات النقطة المجهولة، كما أن قيمة هذه الزوايا تستخدم عند اختيار الحل المطلوب لهذه المسألة، لأن مسألة التقويم تسمح بإمكانية حلين، كما هو مبين من الشكل (2).

في حال قياس الزاوية β في الشكل (2) ممثلة بالزاوية APB، تصبح الزاوية في P′ مساوية β - 360°. يتم في وضع كهذا حساب سمت الاتجاه AB بالعلاقة:

$$\alpha_{AB} = \arcsin\frac{X_B - X_A}{a}$$

يكون في هذه الحالة سمت الاتجاه المتعامد معه ومارّاً بالنقطة M يعطى بالعلاقة $\alpha_{M-O1} = \alpha_{AB} + 90^\circ$ حينما تكون الزاوية $90 \le \beta$. أما إذا كانت الزاوية في P′ مساوية β - 360° يصبح سمت الاتجاه المتعامد مع الاتجاه AB يساوي:



شكل (2): اختيار حل وحيد في مسألة التقويم

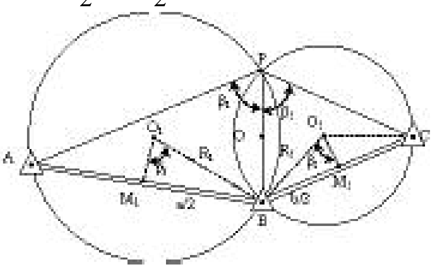
$$\alpha_{M-O'1} = \alpha_{AB} - 90^\circ$$

يرى في الشكل (3) أن الزاوية المقيسة β_1 تمكّن من حساب نصف قطر الدائرة المارة بنقاط الربط A وB والنقطة المجهولة P، وذلك من خلال المعادلة (1) وإحداثيات مركز الدائرة O_1 أي:

$$X_{o1} = \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\beta_1 \sin\alpha_{M1-O1} \quad (9)$$
$$Y_{o1} = \frac{y_A + y_B}{2} + \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\beta_1 \cos\alpha_{M1-O1}$$

يمكن من قياس الزاوية β_2 والضلع b من حساب إحداثيات مركز الدائرة O_2 على الشكل التالي:

$$X_{o2} = \frac{x_B + x_C}{2} + \frac{b}{2}\mathrm{ctg}\beta_2 \sin\alpha_{M2-O2} \quad (10)$$
$$Y_{o2} = \frac{y_B + y_C}{2} + \frac{b}{2}\mathrm{ctg}\beta_2 \cos\alpha_{M2-O2}$$



شكل (3): الدراسة النظرية لمسألة التقويم

تكتب معادلة الدائرة بعد حساب إحداثيات مركزي الدائرتين O_1 و O_2 ونصفي القطر R1 و R2 وفق الشكل (3) على النحو الآتي:

$$(X - X_{o1})^2 + (y - y_{O1})^2 = R_1^2 \quad (11)$$
$$(X - X_{o2})^2 + (y - y_{O2})^2 = R_2^2$$

بطرح المعادلتين في هذه العلاقة يكون:

$$y = \frac{L}{Y_{O2} - Y_{O1}} - \frac{(X_{O2} - X_{O1})}{y_{O2} - y_{O1}} X \quad (12)$$

إذْ:

$$L = \frac{1}{2}(R_1^2 - R_2^2 - X_{O1}^2 - Y_{O1}^2 + X_{O2}^2 + Y_{O2}^2) \text{ و}$$

$$R_1 = \frac{a}{2\sin\beta_1} \text{ و } R_2 = \frac{b}{2\sin\beta_2}$$

بتعويض قيم المعادلة (12) في المعادلة الأولى من العلاقة (11) وبعد إجراء حسابات بسيطة تنتج معادلة من الدرجة الثانية هي:

$$K_1 X^2 - 2K_2 X + K_3 = 0 \quad (13)$$

إذْ:

$$K_1 = 1 + \left[\frac{X_{O2} - X_{O1}}{Y_{O2} - Y_{O1}}\right]^2$$

و
$$K_2 = X_{O1} + \frac{L.(X_{O2} - X_{O1})}{(Y_{O2} - Y_{O1})^2} - \frac{Y_{O1}.(X_{O2} - X_{O1})}{(Y_{O2} - Y_{O1})}$$

$$K_3 = X_{O1}^2 + Y_{O1}^2 - R_1^2 + \frac{L^2}{(Y_{O2} - Y_{O1})^2} - \frac{2LY_{O1}}{(Y_{O2} - Y_{O1})}$$

بحل المعادلة (13) نجد:

$$X_{P,B} = \frac{K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - K_1 K_3}}{K_1} \quad (14)$$

يعطي أحد جذري العلاقة (14) إحداثيات النقطة (X_P) Pفي حين الجذر الآخر إحداثيات النقطة المعلومة $B\ (X_B)$ الذي هو بمنزلة التحقق من صحة الحل. يمكن الحصول على Y_P بتعويض قيمة X_P بالعلاقة (12).

تطبيق 1:

بفرض أن النقطة P رصدت منها النقاط A, B, C ذات الإحداثيات الآتية:

رقم النقطة	X	Y
A	33183.24	30722.23
B	32543.61	29038.52
C	33449.18	27666.31

إذْ قيم الزوايا المرصودة من النقطة P هي:

$\beta_2 = 66^\circ\ 27'\ 51''$, $\beta_1 = 55^\circ\ 11'\ 29''$

والمطلوب حساب إحداثيات النقطة P.

الحل:

بتطبيق العلاقات المستنتجة في البحث وبمقارنة هذه النتائج بحل كنيسل المعروفة [5، 4] يكون:

رقم النقطة	الطريقة المُقترحة		طريقة كنيسل	
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)
P	34043,577	29043,522	34043,571	29043,526

تطبيق 2 :

بفرض أن النقطة P رصدت منها النقـــاط A, B, C التي إحداثياتها هي:

رقم النقطة	X (m)	Y (m)
A	-285339,25	-168684,29
B	-284770,32	-168563,81
C	-285270,17	-169492,26

وقيم الزوايا المرصودة هي:

$\beta_1 = 33.4876$ gr والزاوية $\beta_2 = 105.7201$ gr

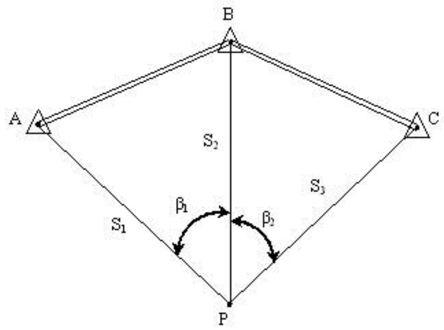
المطلوب حساب الإحداثيات النهائية للنقطة P.

الحل:

باستخدام العلاقات المقترحة فـــي البحـــث وبمقارنـــة النتائج بطريقة غاووس [1] يكون:

رقم النقطة	الحل بالطريقة المُقترحة		الحل بطريقة غاوص	
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)
P	-285475,366	-168868,153	-285475,360	-168868,157

لابد بعد الحصول على المعادلات التي تحقــق حـــل مسألة التقويم بمعادلات سهلة وبسيطة من تقييم دقـــة إحداثيات النقطة المجهولة. يتطلب هذا الأمـــر إيجـــاد العلاقة بين التغير الحاصل في الزوايا المُقيسة والتغير في إحداثيات النقطة المجهولة التي تم الحصول عليها أعلاه [5، 7]. يفضل التعبير عن الزوايا المُقيـــسة مـــن خلال الزوايا السمتية، كما في الشكل (4).



شكل (4): تقييم الدقة في مسألة التقويم

يلاحظ من الشكل (4) حيـــث P النقطـــة المجهولـــة الإحداثيات أن:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_{P-B} - \alpha_{P-A} \\ \beta_2 &= \alpha_{P-C} - \alpha_{P-B} \end{aligned} \qquad (15)$$

بمفاضلة المعادلة (1) يحصل على:

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= d\alpha_{P-B} - d\alpha_{P-A} \\ d\beta_2 &= d\alpha_{P-C} - d\alpha_{P-B} \end{aligned} \qquad (16)$$

بمفاضلة العلاقة المتعلقة بحساب الزوايا السمتية ينتج:

$$tg\alpha_{P-i} = \frac{X_i - X_P}{Y_i - Y_P} \qquad (17)$$

$$d\alpha_{Pi} = -\rho\left(\frac{\cos\alpha_{P-i}}{S_i}\right)dx_P + \rho\left(\frac{\sin\alpha_{P-i}}{S_i}\right)dy_P \qquad (18)$$

يمكن كتابة المعادلة (16) بعـــد أخـــذ المعادلـــة (18) بالحسبان على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} d\beta_1 &= \frac{\rho}{S_1S_2}(S_2\cos\alpha_{P-1} - S_1\cos\alpha_{P-2})\,dx_P + \frac{\rho}{S_1S_2}(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})\,dy_P \\ d\beta_2 &= \frac{\rho}{S_2S_3}(S_3\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-3})\,dx_P + \frac{\rho}{S_2S_3}(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\mathrm{Sin}\alpha_{P-2})\,dy_P \end{aligned} \qquad (19)$$

بإعادة ترتيب المعادلة (19) يكون:

$$\begin{aligned} S_1S_2d\beta_1 &= \rho(S_2\cos\alpha_{P-1} - S_1\cos\alpha_{P-2})\,dx_P + \rho(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})\,dy_P \\ S_2S_3d\beta_2 &= \rho(S_3\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-3})\,dx_P + \rho(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})\,dy_P \end{aligned}$$

بفرض أن:

$$\begin{aligned} S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1} &= u \\ S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2} &= v \end{aligned}$$

ينتج:

$$\begin{aligned} \frac{S_1S_2d\beta_1}{\rho u} &= \frac{1}{u}(S_2\cos\alpha_{P-1} - S_1\cos\alpha_{P-2})\,dx_P + dy_P \\ \frac{S_2S_3d\beta_2}{\rho v} &= \frac{1}{v}\left(S_3\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-3}\right)dx_P + dy_p \end{aligned}$$

بطرح المعادلتين أعلاه من بعضهما بعضاً يكون:

$$\begin{aligned} & S_1S_2(S_2\sin_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})\frac{d\beta_1}{\rho} - S_2S_3(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})\frac{d\beta_2}{\rho} \\ & = [(S_2\cos\alpha_{P-1} - S_1\cos\alpha_{P-2})(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2}) - \\ & \quad (S_3\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-3})(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})]\,dx_P \end{aligned} \qquad (20)$$

بتربيع الجزء الأول من المساواة (20) وجعلها مـــن الشكل:

$$\begin{aligned} & [S_2\sin(\beta_1 + \beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]\,dx_P = \\ & S_1(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})\frac{d\beta_1}{\rho} - S_3[S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1}]\frac{d\beta_2}{\rho} \end{aligned}$$

أو من الشكل:

$$dx_P = \frac{S_1(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})\frac{d\beta_1}{\rho} - S_3(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})\frac{d\beta_2}{\rho}}{S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1}$$

ومنه فإن الخطأ المتوسط التربيع للنقطة $:p\left(m_{x_P}, m_{y_P}\right)$

$$m_{x_P}^2 = \frac{S_1^2(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}\cdot\frac{m^2\beta_1}{\rho^2} + \frac{S_3^2(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}\cdot\frac{m^2\beta_2}{\rho^2}$$

بفرض أن الزوايا المُقيسة بالجهاز نفسه وبالظروف نفسها يمكن اعتبار أن $m_{\beta_1}^2 = m_{\beta_2}^2 = m_\beta^2$ لذا يحصل على:

$$m_{xp} = \frac{m_\beta}{\rho}\sqrt{\frac{S_1^2(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})^2 + S_3^2(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}} \quad (21)$$

وبالطريقة السابقة نفسها يكون:

$$m_{yp} = \frac{m_\beta}{\rho}\sqrt{\frac{S_1^2(S_2\cos\alpha_{P-3} - S_3\cos\alpha_{P-2})^2 + S_3^2(S_1\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-1})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}} \quad (22)$$

يمكن أن نكتب العلاقتين (21) و (22) بالشكل الآتي:

$$m_{x_P} = m_\beta K_x$$
$$m_{y_P} = m_\beta K_y \quad \Rightarrow \quad m_{x_P}^2 + m_{y_P}^2 = m_\beta^2(K_x^2 + K_y^2)$$

دائرة الخطأ في النقطة P

إِذْ:

$$K_x = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{S_1^2(S_2\sin\alpha_{P-3} - S_3\sin\alpha_{P-2})^2 + S_3^2(S_1\sin\alpha_{P-2} - S_2\sin\alpha_{P-1})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}}$$

و

$$K_y = \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{S_1^2(S_2\cos\alpha_{P-3} - S_3\cos\alpha_{P-2})^2 + S_3^2(S_1\cos\alpha_{P-2} - S_2\cos\alpha_{P-1})^2}{[S_2\sin(\beta_1+\beta_2) - S_1\sin\beta_2 - S_3\sin\beta_1]^2}}$$

بفرض أن إجراء القياس تم وفق أربع سلاسل بجهاز تيودوليت يعطي دقة الثانية المئوية، يمكن أن نقبل خطأ على الاتجاه قيس أربع مرات وبالوضعين مقداره $\pm 10^{cc}$ أي أن الخطأ على كل من الزاويتين β_1 , β_2 المستنتجتين من قياس الاتجاهات الأفقية:

$$m_\beta = \pm 10^{cc}\sqrt{2} \approx 15^{cc}$$

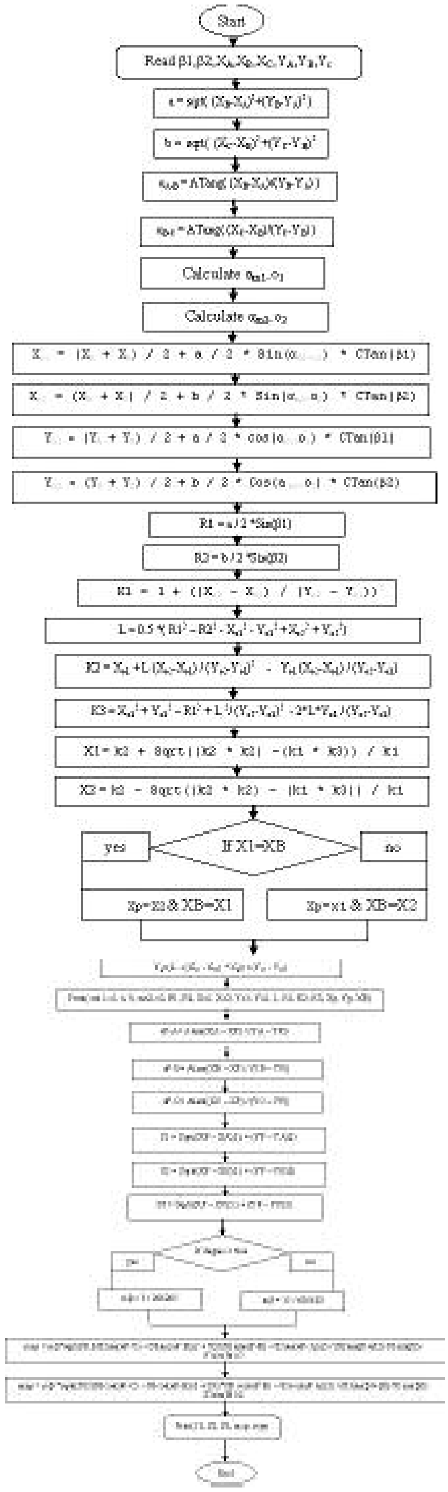
بأخذ المعطيات السابقة في التطبيقين الأول والثاني التي تم من خلالهما إيجاد الإحداثيات للنقطة P المجهولة وعلى ضوء النتائج النظرية التي توصلنا إليها لتقويم دقة إحداثيات هذه النقطة وفقاً للعلاقات التي توصلنا إليها أعلاه نجد:

تطبيق 2			تطبيق 1		
[m] m_{x_P}	[m] m_{y_P}	m_p [cm]	[m] m_{x_P}	[m] m_{y_P}	m_p [cm]
0.009	0.018	2.01 cm	0.010	0.013	1.64 cm

الاستنتاجات:

استناداً إلى الدراسة التحليلية والتطبيقات التي تمت، نورد أهم النتائج الحاصلة بالنقاط التالية:

1. تبقى من خلال تقييم النتائج النقطة المحسوبة ضمن دائرة خطأ نصف قطرها المتوسط يساوي 2.01 cm في التطبيق الأول و 1.64 cm في التطبيق الثاني، أي أن الدقتين متقاربتان.
2. تبقى هذه الطريقة عاجزة عن الحل، مثلها مثل طريقتي غاووس وكاسيني، إذا اقتربت النقاط الثلاث المعلومة A, B, C من وضع وقوعها على مستقيم واحد.
3. إن ميزة هذه الطريقة تكمن في إمكانية استخدامها في برمجيات معروفة كون هذه الطريقة تحليلية.
4. إن الخوارزمية المقترحة سهلة وبسيطة يمكن برمجتها وفقاً للمخطط النهجي المبين في الشكل رقم (5) وبأي لغة من لغات البرمجيات المتداولة.
5. إن حل هذه المسألة يتضمن إمكانية التمركز قريباً من الدائرة الخطرة وإجراء القياسات اللازمة التي تعطي الحل المطلوب لإحداثيات النقطة المجهولة.



الشكل (5) المخطط النهجي للحل المقترح

المراجع:

1- معن حبيب وأنور الصيفي، المساحة، جامعة دمشق (2008).

2.El Hassan I.M., Two-Dimensional Resection-A Survey of Analytical Techniques, The Australian Surveyor, Vol.47, No.1, pp.14-23, 2002.

3.Anderson J.M., Mikhail E.M. Surveying (Theory and Practice), 7th ed., WCB/Me Graw-Hill, New York, 1998, 497-501.

4.ПОКЛАД,Г.Г.; ГРИДНЕВ,С.П.(2008)ГЕОДЕЗИЯ;МОСКВА

5.МАСЛОВ,А.В;ГОРДЕЕВ,А.В.(2006)ГЕОДЕЗИЯ;МОСКВА.

6.http://www.surv.ufl.edu/courses [Surveying Measurements and Computations, Resection, University of Florida, Geomatics, erişim tarihi Ocak 2008].

7.КЛЮШИН,Е.Б.;ВЛАСЕНКО,Е.П.(2008): Оценка точности обратной угловой засечки,журнал ИЗВЕСТИЯ №3-МОСКВА.

تاريخ ورود البحث إلى مجلة جامعة دمشق: 2009/8/27.