العلاقات الحرجة للأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون بمقاومات مختلفة

الدكتور إبراهيم أحمد الجراد
قسم الهندسة الإنشائية
جامعة دمشق

الملخص

يستعرض هذا البحث دراسة الحالة الإجهادية – التشوهية للعناصر المكونة من أنابيب فولاذية مملوءة بالبيتون تحت تأثير الضغط اللامركزي. وتبيّن أن هذه العناصر تبدأ بفقدان استقرارها عندما تصل التشوهات اللدنة قيمها الحدية، والموافقة لحالة توازن العزوم الخارجية مع العزوم الداخلية.

ولقد تم تعيين العلاقات الحرجة للأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون في حالة حدوث السيلان من طرفي المقطع باستخدام طريقة جداءات لاغرانج غير المعينة. إضافة إلى ذلك تمّ اقتراح شكل جديد للعلاقة الرياضية $\sigma = f(\varepsilon)$ اللاخطية لعمل النواة البيتونية والذي يأخذ بالحسبان تغيّر المقاومات المختلفة للبيتون.

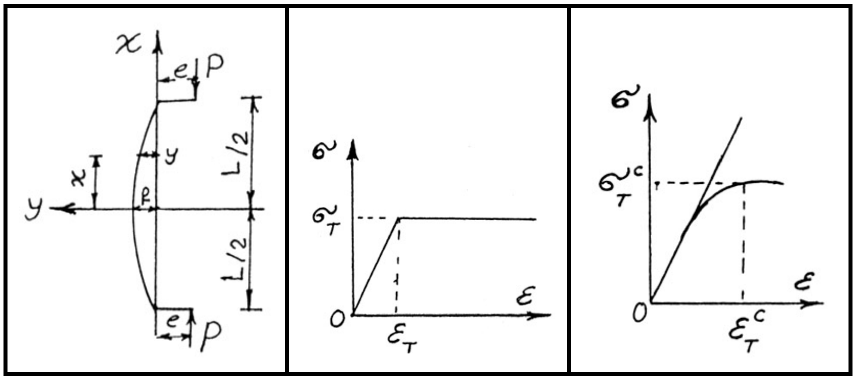
1- المقدمة :

يمثل استقرار المنشآت الهندسية تحت تأثير الحمولات الخارجية مسألة صعبة ذات أهمية كبيرة كونها شغلت اهتمام أغلب الباحثين والدارسين منذ زمن بعيد. لأن فقدان استقرار المنشأ مرتبط بقدرة تحمل مادة المنشأ على التشوهات الناتجة عن تطبيق الحمولات الخارجية، ويسمى بفقدان استقرار الحالة الإجهادية للمنشأ أو الحالة التشوهية. لقد بينت أغلب الدراسات النظرية والتجريبية في هذا المجال أن عناصر المنشآت الفولاذية الخاضعة للضغط المركزي والضغط اللامركزي تفقد استقرارها بعد أن تظهر فيها التشوهات اللدنة . وبناءً على ذلك فإن قدرة تحمل العناصر الإنشائية الحاملة تعيّن عندما تفقد استقرارها في المرحلة المرنة– اللدنة من عملها كما هو مبين في المراجع [1 و 2 و 5] . وفي الحالة العامة يمكن أن ندرس عمل العناصر المعرضة للضغط اللامركزي كما في حالة العناصر الخاضعة لضغط مركزي .

في هذا البحث سندرس قدرة تحمل العناصر المعرضة للضغط اللامركزي والمكونة من الأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون ذي مقاومات مختلفة تحت تأثير الحمولات الحية، المطبقة على نهايتي العمود مع تساوي اللامركزية من الجانبين ولهما الاتجاه نفسه عن مركز ثقل المقطع العرضي . تستخدم عناصر الأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون في البلدان المتطورة صناعياً لأن استخدامها مرتبط بتوافر الدراسة النظرية و التجريبية لطرق التصميم وإمكانية تصنيع المقاطع المطلوبة من الصفائح الفولاذية .إن الأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون تستخدم على شكل واسع النطاق كأعمدة معرضة للضغط المركزي للخزانات المائية و الأبنية السكنية و الجوائز الشبكية و كذلك في ركائز الجسور و الأوتاد ذات الأقطار الكبيرة كما هو موضح في المرجع [7] . و يمكن استخدامها أيضا كأعمدة حاملة للرافعات في الأبنية الصناعية بحيث تعمل على الضغط اللامركزي و تنفذ عندئذ هذه العناصر على شكل مقاطع مركبة بحيث يوضع الأنبوب في منطقة الضغط ، و جزء المقطع الفولاذي في منطقة الشد ، و يصنع الجزء الفولاذي من صفائح معدنية على شكل مقطع T أو I ، و تبدي هذه المقاطع المركبة اقتصادية كبيرة من حيث مصروف المعدن عند استخدامها في حالة الانحناء كجوائز في المنشآت المعدنية .

2- الفرضيات المستخدمة في البحث :

نعدّ أن عمل البيتون والفولاذ في الحالة المرنة – اللدنة يمثل مخطط الحالة الإجهادية المبينة في الشكل (١) . ونفرض أن حد سيلان (تلدن) الفولاذ σ_T له القيمة نفسها في حالتي الشد والضغط . سماكة قشرة الأنبوب الفولاذي يمكن إهماله بالمقارنة مع قطره . إن تأثير الإجهادات القاصة في قيمة الحمولة الحرجة يشكل مقداراً صغيراً يمكن اهماله في حالة العناصر ذات المقاطع المصمتة . في المرجع [4] يبّين أن قيمة الحمولة الحرجة الحقيقية أقل من قيمتها التي نحصل عليها عند أخذ تأثير القوى القاصة بمقدار 0.2-0.5 % .



c- مخطط σ-ε عمل البيتون **b – مخطط σ-ε عمل الفولاذ** **a - المخطط الحسابي لعنصر يعمل على الضغط اللامركزي**

الشكل ١:

نستخدم فرضية برنولي لعمل مادة قشرة الأنبوب σ-ε في الحالة المرنة- اللدنة والتي توافق الشكل (1 , b) . وهذه الفرضية لها أهمية بالغة على قيم الحمولات الحرجة عند وجود لامركزيات صغيرة = 0,1 e كما جاء في المرجع [3]، في حين لا تكون فعالة عند قيم لامركزية كبيرة تقريباً e = 2 .

يؤخذ مخطط الإجهادات σ-ε للنواة البيتونية على شكل منحنٍ كما في الشكل (1 , c) وهو أقرب إلى الواقع لعمل البيتون و هذا مغاير لما جاء في المرجع [8]. كما أنه يهمل عمل البيتون في منطقة الشد. ويمكن من المخططات التجريبية للضغط المحوري للبيتون والفولاذ في الحالة العامة أن تمثل العلاقة σ-ε كتابع كثير الحدود من الشكل، كما ورد في المصدر [9].

$$\sigma=\sum_{m=0}^{n} a_m \cdot \varepsilon^{n-m} \qquad (1)$$

ويمكن أن تكون العلاقة التقريبية التجريبية (1) من الدرجة الثانية. وإذا كان للفولاذ والبيتون عتبة سيلان واضحة عندئذ العلاقة (1) تمثل مخطط σ-ε حتى عتبة السيلان. أو يمكن كتابة العلاقة السابقة من الشكل :

$$\sigma=a.\varepsilon^{n} \qquad (2)$$

وكذلك يمكن من العلاقة (1) كتابة الحالة الخاصة الواردة في المصدر [2] وعلى سبيل المثال من الشكل :

$$\sigma = A.\varepsilon^K (1 - \gamma_1.\varepsilon) \qquad (3)$$

حيث :

γ_1 و K و A متحولات يتم تعيينها تجريبياً وذلك باستخدام الطريقة الإحصائية الرياضية لعدد من التجارب المخبرية لعينات مكعبية من البيتون [2].

العلاقة (3) تمثل بمنحنيات تجريبية وهي تحقق قانون هوك من أجل $A = E$ و $K = 1$ و $\gamma_1 = 0$. أما في حالة الشروط $\gamma_1 = 0$ ، $\sigma_T = A$ و $K = 0$ فهي تحقق شروط الجسم الصلب واللدن. وكذلك تسمح العلاقة (3) بالحصول عند $\varepsilon = \varepsilon_{st}$ على قيمة $\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} = 0$. وفي الجدول (1) نبين قيمة الإجهاد في النواة البيتونية حسب المقاومة المكعبية f'_{co} كما وردت في المرجع [2] على النحو الآتي:

الجدول ١: قيم إجهاد السيلان (حد الخضوع) σ_T^c في النواة البيتونية بدلالة المقاومة المكعبية للبيتون

f'_{co} kg/cm^2	A	K	γ_1	σ_T^C
250	$2,84 \cdot 10^4$	0,680	126,4	373
350	$2,81 \cdot 10^4$	0,643	122,2	430
450	$1,2925 \cdot 10^4$	0,558	112	480
550	$1,7 \cdot 10^7$	0,516	106,3	565

إضافة إلى ما ذكر نستخدم المعادلة التفاضلية التقريبية للانحناء $\frac{1}{\rho} \approx -\frac{d^2y}{dx^2}$ وإنّ محور الانحناء يقترب من شكل تابع نصف جيبي ، ونتائج مثل هذا الحل لاتختلف كثيراً عن الحل الدقيق كما هو مبين في المصدر [6] .

إن الفرضيات السابقة المعتبرة في أثناء الحل تسمح بدراسة الحالة الإجهادية – التشوهية للعناصر المعرّضة لضغط لامركزي عندما تزداد الحمولات الخارجية تدريجياً مع الزمن وكما تساعد في حل المسألة بشكل أسهل. ويتمثل هذا التبسيط في دراسة توازن (استقرار) نصف العنصر، وبشكل مستقل للمقطع المحمّل بشكل أعظمي مع الأخذ بالحسبان فقط توزع الإجهادات في المقطع العرضي في منتصف طول العنصر. ويلاحظ في هذا المقطع وجود عدة احتمالات لتوزع الإجهادات والتشوهات وأهمها حالة السيلان في المقطع من جهة واحدة وكذلك وهي الأهم والتي سنتناولها في هذا البحث حالة السيلان (التلدن) من الطرفين وتشوهات السيلان في كلا طرفي المقطع العرضي.

3- حالة السيلان (التلدن) من كلا طرفي المقطع العرضي :

نفترض أن مخطط توزع الإجهادات والتشوهات عند حدوث السيلان (التلدن) من جهتي المقطع العرضي للأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون كما هو مبين في الشكل (2). إن التشوهات تصل قيمتها ε_T في كلا

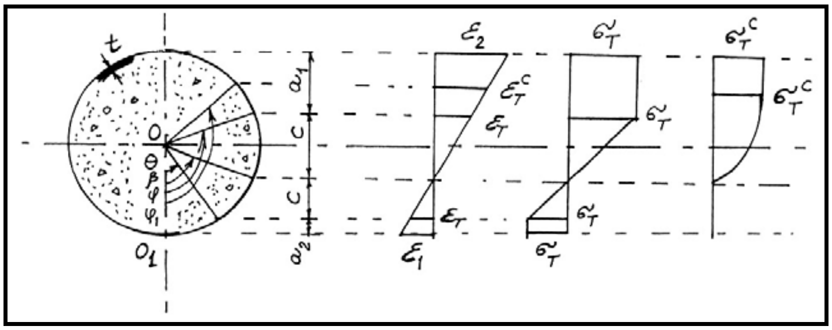
جهتي المقطع العرضي . من الجهة المقعرة تتوزع منطقة السيلان على مسافة a_1 على حين في جهة التحدب على مسافة a_2 . قيمة الجزء المرن للمقطع العرضي في منطقة الضغط والشد تتعين بالمسافة C.

لحل مسألة استقرار العنصر المدروس نضع أولاً معادلة توازن الحمولة الخارجية المؤثرة مع الحمولة الداخلية، وكذلك نكتب معادلة توازن عزم الانعطاف الداخلي مع قيمة عزم الانعطاف الخارجي وذلك من شكل مخطط الإجهادات للمقطع العرضي أي :

$$P = \int_A \sigma . dA \tag{4}$$

حيث : P : القوة الناظمية (الطولية) وغير منطبقة على محور العنصر.

σ : الإجهاد الناظمي ، dA – المساحة الجزئية للمقطع العرضي للعنصر المدروس.



(a) (b) (c) (d)

الشكل ٢: مخططات الحالة الإجهادية – التشوهية عند حدوث السيلان (التلدن) من جهتي المقطع

a- المقطع العرضي للعنصر المدروس
b- مخطط التشوهات الطولية
c- مخطط الإجهادات الناظمية في قشرة الأنبوب
d- مخطط الإجهادات الناظمية في النواة البيتونية

نستخدم مفهوم الإجهاد الوسطي σ^* في أثناء إيجاد العلاقة (4) في المقطع الوسطي للعنصر

$$P_i = \sigma^* . R^2 \quad \text{القوة الداخلية الناظمية} \tag{5}$$

حيث : R – نصف قطر الأنبوب . σ^* – الإجهاد الوسطي .

العزم الداخلي حول المحور المار من مركز ثقل المقطع العرضي:

$$M_i = \int_A \sigma . Z \, dA \qquad (6)$$

حيث:

$Z = R. \cos\propto$ – المسافة ما بين المساحة الجزئية dA ومركز ثقل مقطع الأنبوب .

إن التحول من الجزء المرن للمقطع إلى منطقة السيلان (التلدن) ، يتعين : من أجل الفولاذ بالزاوية φ لمنطقة الضغط وبالزاوية θ لمنطقة الشد، وللبيتون بالزاوية φ_1 . ومن أجل الإحداثيات المتغيرة للسيلان نستخدم الزاوية المركزية $\propto$ ، وتحسب بدءاً من المحور $o\text{-}o_1$. يعين موقع المحور المحايد بالزاوية β شكل (2) .

تعين المساحة الجزئية dA لفولاذ الأنبوب بدلالة الإحداثيات المنزلقة $\propto$ بالعلاقة :

$$dA_{st} = 2Rt \; d\propto \qquad (7)$$

حيث : t – سماكة قشرة الأنبوب $0 \le \propto \le \pi$.

عبارة dA للنواة البيتونية بدلالة الإحداثي المتغير $\propto$ تكتب من الشكل :

$$dA_c = 2R^2 \sin^2 \propto d\propto \qquad (8)$$

ونصطلح كعلاقة رابطة بين مخططات الإجهاد والتشوه للبيتون والفولاذ كالآتي :

$$n = \frac{\varepsilon_T^c}{\varepsilon_T} \quad ; \quad K = \frac{\sigma_T^c}{\sigma_T} \quad ; \quad \xi = \frac{K}{n} = \frac{E_C}{E_T} \qquad (9)$$

حيث : σ_T^c – إجهاد السيلان (حد الخضوع) في النواة البيتونية .

σ_T – إجهاد السيلان (حد الخضوع) في القشرة الفولاذية .

ε_T - تشوه سيلان الفولاذ . E_t – عامل مرونة الفولاذ

ε_T^C - تشوه سيلان البيتون . E_c- عامل مرونة النواة البيتونية.

العلاقة بين مساحتي المقطعين العرضيين للبيتون والفولاذ تعيّن بنسبة التسليح :

$$\mu = \frac{A_{st}}{A_C} = \frac{2t}{R} \qquad (10)$$

حيث : $A_{st} = 2\,\pi Rt$ و $A_c = \pi R^2$.

ويعبر عن شرط تساوي التشوهات المشتركة بين البيتون والفولاذ بالعلاقة :

$$n = \frac{\varepsilon_T^C}{\varepsilon_T} = \frac{\cos\beta - \cos\varphi_1}{\cos\beta - \cos\varphi} \qquad (11)$$

التشوهات الناتجة في أي ليف من المقطع العرضي للعنصر تعطى بدلالة المحاور المنزلقة $\propto$ من تشابه مثلثات مخطط التشوه شكل (2) :

$$\varepsilon_{\propto} = \varepsilon_T \cdot \frac{\cos\propto - \cos\varphi}{\cos\beta - \cos\varphi} \quad ; \quad \sigma_{\propto} = E \cdot \varepsilon_{\propto}$$ من أجل فولاذ الأنبوب

$$\varepsilon_{\propto} = \varepsilon_T^C \cdot \frac{\cos\beta - \cos\propto}{\cos\beta - \cos\varphi_1} \quad ; \quad \sigma_{\propto}^C = E \cdot \varepsilon_{\propto}^C \qquad (12)$$ من أجل النواة البيتونية

حيث :

φ - الزاوية المركزية للفولاذ، والتي تحدد موقع ليف التشوه ε_T في المنطقة المضغوطة من المقطع.

θ- الزاوية المركزية للفولاذ، والتي تحدد موقع ليف التشوه ε_T في المنطقة المشدودة من المقطع.

φ_1- الزاوية المركزية للبيتون، والتي تحدد موقع ليف التشوه ε_T^C في المنطقة المضغوطة من المقطع.

β- الزاوية المركزية، التي تحدد موقع المحور المحايد .

ارتفاع المنطقة المرنة C الواقعة في منطقة الضغط تعين من الشكل (2) بالعلاقة :

$$C = R\cos\beta + R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = R\left(\cos\beta - \cos\varphi\right) \qquad (13)$$

في حين يعين ارتفاع الجزء المرن C الواقع في منطقة الشد بالعلاقة :

$$c = R\left(\cos\theta - \cos\beta\right) \qquad (14)$$

نجري تكامل العلاقتين (4) و (6) على المقطع العرضي بشكل مستقل لكل من النواة البيتونية وفولاذ الأنبوب، وبعد ذلك نقوم بجمع النتائج النهائية مع اعتبار تطابق التشوهات الحاصلة بين البيتون والفولاذ، بعد فرض أن كامل المقطع يعمل بشكل كتلة متجانسة واحدة.

القوة الناظمية في فولاذ الأنبوب من شرط التوازن (4) تساوي :

$$P_{st} = 2Rt\,\sigma_T\,(\pi - 2\theta) - \int_{\theta}^{\varphi} \sigma_T \frac{\cos\propto - \cos\varphi}{\cos\beta - \cos\varphi} 2Rt\,d\propto \qquad (15)$$

بعد إجراء عملية التكامل والتبسيط تؤول المعادلة (15) إلى الشكل :

$$P_{st} = 2Rt\,\sigma_t \frac{\pi(\cos\beta - \cos\varphi) - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\cos\beta - \cos\varphi} + 2Rt\,\sigma_t \cdot \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\cos\beta - \cos\varphi}; \qquad (16)$$

وبالمثل نوجد القوة الناظمية في النواة البيتونية من مخطط الإجهادات الناظمية وفق شرط التوازن (4) :

$$P_c = \int_{\beta}^{\varphi_1} A\left(\varepsilon_T^C \frac{\cos\beta - \cos\propto}{\cos\beta - \cos\varphi_1}\right)^K \left(1 - \gamma_1 \frac{\cos\beta - \cos\propto}{\cos\beta - \cos\varphi_1} . \varepsilon_T^C\right) . 2R^2 .$$

$$\sin^2 \propto d\propto + \int_{\varphi_1}^{\pi} \sigma_T^C . 2R^2 . \sin^2 \propto d\propto \qquad (17)$$

وبعد إجراء التكامل تأخذ العلاقة (17) الشكل الآتي :

$$P_c = A \frac{2R^2 (\varepsilon_T^C)^K}{(\cos\beta - \cos\varphi)^{K+1}} \int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^K . [\cos\beta\ (1-\gamma) - \cos\varphi_1 + \gamma . \cos\propto] .$$

$$. \sin^2 \propto d\propto + \sigma_T^C R^2 (\pi - \varphi_1 + \sin\varphi_1\ ocs\varphi_1)$$

(18)

حيث : $\gamma = \gamma_1 . \varepsilon_T^c$

القوة الناظمية الداخلية في الأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون الكلية تنتج من حاصل جمع العلاقتين (16) و (18) :

$$P_i = P_{st} + P_c$$

$$P_i = 2Rt\sigma_T . \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\cos\beta - \cos\varphi} + 2Rt\sigma_T \frac{\pi(\cos\beta - \cos\varphi)(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}{\cos\beta - \cos\varphi} +$$

$$+ A \frac{2R^2}{(\cos\beta - \cos\varphi)^{K+1}} + \int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^K . [\cos\beta\ (1-\gamma) - \cos\varphi_1 + \gamma . \cos\propto] .$$

$$. \sin^2 \propto d\propto + \sigma_T^C R^2 (\pi - \varphi_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_1)$$

(19)

وباستخدام العلاقة (6) يمكن أن نوجد العزم الرئيسي بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي من أجل القشرة الفولاذية للأنبوب :

$$M_{st} = \int_0^{\theta} 2\sigma_T R\cos\propto 2Rt\, d\propto + \int_{\theta}^{\varphi} 2\sigma_T \frac{\cos\propto - \cos\varphi}{\cos\beta - \cos\varphi} R\cos\propto . 2Rtd\propto \qquad (20)$$

وبعد إجراء التكامل تؤول المعادلة (20) إلى الشكل :

$$M_{st}=\sigma_T R^2 t\,\frac{(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)-(\theta-\sin\theta\cos\theta)}{\cos\beta-\cos\varphi} \tag{21}$$

نكتب عبارة عزم الانعطاف في النواة البيتونية وفق العلاقة (6) بالنسبة لمركز ثقل المقطع العرضي :

$$M_C=\int_\beta^\varphi A\left(\frac{\cos\beta-\cos\propto}{\cos\beta-\cos\varphi_1}\varepsilon_T^C\right)^k\left(1-\gamma_1\frac{\cos\beta-\cos\propto}{\cos\beta-\cos\varphi_1}\varepsilon_T^C\right)(-R.\cos\propto).$$

$$.2\ R^2\sin^2\propto d\propto+\int_{\varphi_1}^{\pi}\sigma_T^C(-R\cos\propto)2R^2\sin^2\propto d\propto \tag{22}$$

وبعد إجراء التكامل والتبسيط تؤول المعادلة (22) إلى الشكل :

$$M_C=\frac{2}{3}\sigma_T^C R^3\sin^3\varphi_1+A\frac{2R^3(\varepsilon_T^C)^K}{(\cos\beta-\cos\varphi_1)^{K+1}}\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K.(-\cos\propto).$$

$$.[(1-\gamma)\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma\cos\propto]\sin^2\propto d\propto \tag{23}$$

وبجمع العلاقتين (21) و (23) نحصل على قيمة عزم الانعطاف لكامل المقطع العرضي حول المحور المار من مركز ثقله .

$$M_i=M_{st}+M_C=\frac{2}{3}\sigma_T^C R^3\sin^3\varphi_1+A\frac{2R^3(\varepsilon_T^C)^K}{(\cos\beta-\cos\varphi)^{K+1}}.$$

$$.\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K(-\cos\propto)[(1-\gamma)\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma.\cos\propto]. \tag{24}$$

$$.\sin^2\propto d\propto+\sigma_T R^2 t\frac{\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\beta-\cos\varphi}-\sigma_T R^2 t\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{\cos\beta-\cos\varphi}\quad ;$$

من تساوي العلاقتين (5) و (21) نحصل على علاقة القوة الناظمية كتابع متعلق بمتحولات الحالة الإجهادية للمقطع الوسطي :

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_T}=\frac{P}{\cos\beta-\cos\varphi} \tag{25}$$

حيث :

$$P=\mu[\pi(\cos\beta-\cos\varphi)-(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)+(\sin\theta-\theta\cos\theta)]+$$

$$+2\frac{A}{E}(\varepsilon_T^C)^{K-1}.\frac{1}{(\cos\beta-\cos\varphi_1)^K}\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\varphi)^K[(1-\gamma). \quad (26)$$

$$.\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma\cos\propto]\sin^2\propto d\propto$$

عزم الانعطاف في منتصف طول العنصر نتيجة الحمولة الخارجية شكل (١) يساوي :

$$M=P(e-f) \quad (27)$$

حيث : e – لامركزية نقطة تطبيق الحمولة P .

f - السهم في منتصف طول العنصر شكل (1) .

من المعادلة (27) نعين السهم f في منتصف العنصر :

$$f=\frac{M}{P}-e \quad (28)$$

وبتعويض قيمة P من العلاقة (19) وقيمة M من العلاقة (24) تأخذ العلاقة (28) الشكل الآتي :

$$f=\frac{\sigma_T}{\sigma^*}R\left(\frac{M}{\cos\beta-\cos\varphi}-m\frac{\sigma_T}{\sigma^*}\right) \quad (29)$$

حيث :

$$M=\frac{M_i}{\sigma_T R^3}(\cos\beta-\cos\varphi) \quad (30)$$

اللامركزية النسبية $m=\dfrac{e}{R}$

تكتب العلاقة (30) بعد تعويض عبارة M_i من العلاقة (24) بالشكل:

$$M=\frac{1}{2}\mu[(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)-(\theta-\sin\theta\cos\theta)]+\frac{2}{3}K_1\sin^3\varphi_1.(\cos\beta-\cos\varphi)+$$

$$+\ 2\frac{A}{E}(\varepsilon_T^C)^{K-1}.\frac{1}{(\cos\beta-\cos\varphi)^K}\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K.[(1-\gamma).$$

$$.\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma\cos\propto](-\cos\propto)\sin^2\propto\ d\propto$$

$$(31)$$

تمثل العلاقة (29) معادلة السهم في منتصف العنصر بدلالة متحولات الحالة الإجهادية في المقطع الوسطي للعنصر أي $f = f(\beta, \varphi, \theta, \varphi)$.

بعد ذلك ندرس الخواص الهندسية للمسألة المدروسة . علاقة انحناء الخط المرن من أجل المقطع الواقع في منتصف العنصر تكتب من الشكل :

$$\zeta = \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2R} \tag{32}$$

حيث : ρ - نصف قطر الانحناء . $2R = H$ – ارتفاع المقطع العرضي .

ε_1 و ε_1 – التشوهات النسبية الطرفية للمقطع العرضي عند منتصف طول العنصر .

من تشابه مثلثات مخطط التشوه شكل (2) يمكن أن نوجد :

$$\zeta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2R} = \frac{\varepsilon_T}{C} = \frac{\sigma_T}{E.C} \tag{33}$$

حيث: C – ارتفاع منطقة المرونة في فولاذ الأنبوب وتعطى قيمتها بدلالة متحولات الحالة الإجهادية للمقطع الوسطي وفق العلاقتين (13) و (14) .

نفرض معادلة الخط المنحني المرن للعنصر من الشكل :

$$y = f \cos \frac{\pi x}{L} \tag{34}$$

حيث : x , y - إحداثيات نقطة ما واقعة على محور العنصر.

L – طول العنصر. f- السهم الأعظمي في منتصف طول العنصر .

إن انحناء العنصر يمكن أن يعطى بالمعادلة التفاضلية التقريبية :

$$\zeta = \frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \tag{35}$$

نشتق العلاقة (34) وبالتعويض في العلاقة (35) ، عندما $x = 0$ ، فنحصل :

$$\zeta = -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\pi^2}{L^2} f \tag{36}$$

ومن مساواة العلاقتين (33) و (36) وبعد تعويض قيم f و C من العلاقتين (29) و (13) نحصل :

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma^*}\left[M - \frac{\sigma^*}{\sigma_T} m \cos\beta + \frac{\sigma^*}{\sigma_T} m \cos\varphi\right] \tag{37}$$

أو تكتب هذه العلاقة بشكل آخر :

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2=\frac{\pi^2 E}{\sigma^*}.\phi(\varphi\ ,\ \varphi_1\ ,\ \beta,\theta) \qquad (38)$$

حيث:

$$\phi=\left[M(\varphi\ ,\ \varphi_1\ ,\ \beta,\theta)\right]-\frac{\sigma^*}{\sigma_T}m\cos\beta+\frac{\sigma^*}{\sigma_T}m\cos\varphi] \qquad (39)$$

العلاقة (37) تربط بين طول العنصر المدروس مع متحولات الحالة الإجهادية لمقطع منتصف العنصر وهي تعيّن شرط توازن الشكل المنحني للعنصر. إن المسألة الموضوعة في هذا البحث هي الكشف عن العلاقة التي تربط المتحولات مع بعضها في الحالة الحرجة للعنصر. حيث يبدأ العنصر بفقدان استقراره (توازنه)، عندما تزداد التشوهات اللدنة وتصل قيمها الحدية، عند تطبيق شرط توازن العزوم الخارجية مع العزوم الداخلية. إن البحث عن الحالة الحرجة للعنصر يمثل البحث عن الطول الأعظمي L المعين بالعلاقة (38)، والذي يتمثل بدراسة شروط التابع ϕ الحدية وفق العلاقة (39) الداخل في عبارة L وبعد أن نفترض أن القوة الناظمية ولا مركزية هذه القوة هي مقادير ثابتة. ويتم البحث عن الحالة الحرجة باستخدام طريقة لاغرانج الجداءات غير المعينة، التي تستعمل في وقتنا الحاضر كطريقة مريحة لحل المسألة عند الشروط الحدية المطلوبة لتحديد نقطة ثابتة حيث ينصح باستخدام هذه الطريقة لدراسة استقرار العناصر عند وجود عدد من المتحولات وعلى سبيل المثال عند دراسة استقرار العناصر الخاضعة لضغط لامركزي وخاضعة لقوى موزعة وكذلك خاضعة لإجهادات بدائية مسبقة. وكشروط إضافية لربط المتحولات مع بعضها نستخدم التوابع التالية :

$$\phi_1=\cos\beta-\cos\varphi_1-n(\cos\beta-\cos\varphi)=0 \qquad (40)$$

$$\phi_2=\frac{p}{(\cos\beta-\cos\varphi}-\frac{\sigma^*}{\sigma_T}=0 \qquad (41)$$

$$\phi_3=2\cos\beta-\cos\varphi-\cos\theta=0 \qquad (42)$$

المعادلة (40) نحصل عليها من شرط تساوي التشوهات بين البيتون والفولاذ العلاقة (11)، في حين نحصل على العلاقة (41) من علاقة القوة الناظمية كتابع متعلق بمتحولات الحالة الإجهادية للمقطع الوسطي (25)، في حين المعادلة (42) يتم تشكيلها من تساوي ارتفاع المنطقة المرنة C المحددة في العلاقتين (13) و (14).

طريقة الحل تتم بتشكيل تابع لاغرانج من الشكل :

$$F=\phi+\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\lambda_3\phi_3$$

حيث : $\lambda_1\ ,\lambda_2\ ,\lambda_3$ - جداءات لاغرانج غير المعينة :

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial\beta}=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial\varphi_1}=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial\theta}=0 \qquad (44)$$

من المعادلة (44) ينتج الآتي :

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = M'_{\varphi} - \frac{\sigma^*}{\sigma_T}\, m \sin\varphi + \lambda_1 \frac{(\cos\beta - \cos\varphi)\, P'_{\varphi} - P\sin\varphi}{(\cos\beta - \cos\varphi)^2} + \lambda_2 n_1 \,. \quad (45)$$

$$.\,(-\sin\varphi) + \lambda_3 \sin\varphi = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = M'_{\beta} - \frac{\sigma^*}{\sigma_T}\, m \sin\beta + \lambda_1 \frac{(\cos\beta - \cos\varphi)\, P'_{\beta} + P\sin\beta}{(\cos\beta - \cos\varphi)^2} + \lambda_2 \,. \quad (46)$$

$$.(1-n)\,(-\sin\beta) + \lambda_3 .2(-\sin\beta) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = M'_{\theta} + \lambda_1 - \frac{P'_{\theta}}{(\cos\beta - \cos\varphi)} + \lambda_2 .o + \lambda_3 .\sin\theta = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1} = M'_{\varphi_1} + \lambda_1 - \frac{P'_{\varphi_1}}{(\cos\beta - \cos\varphi)} + \lambda_2 .\sin\varphi_1 + \lambda_3 .0 = 0 \quad (48)$$

وبإدخال المصطلحات الآتية :

$$P_{\beta} = \frac{P'_{\beta}}{\sin\beta} \quad ; \quad M_{\varphi} = \frac{M'_{\varphi}}{\sin\varphi} \quad ; \quad M_{\varphi_1} = \frac{M'_{\varphi_1}}{\sin\varphi_1} \quad ; \quad M_{\theta} = \frac{M'_{\theta}}{\sin\theta} \quad (49)$$

وبحل المعادلات(46) و (47) و (48) نحصل على قيم الجداءات غير المعينة λ_3 , λ_2 , λ_1 ،

ومن أجل ذلك نستخدم الشروط الإضافية (40) و (41) و (42) ، وبعد التعويض والتبسيط في (45) نحصل على المعادلة العامة التي تربط بين المتحولات في الحالة الحرجة :

$$m - \frac{M_{\varphi} + M_{\varphi_1} + M_{\beta} + M_{\theta}}{P_{\varphi} + P_{\varphi_1} + P_{\beta} + P_{\theta}} + \frac{(M_{\beta}P_{\varphi} - M_{\varphi}P_{\beta}) + (M_{\theta}P_{\beta} - M_{\beta}P_{\theta}) +}{\frac{\sigma^*}{\sigma_T}(P_{\varphi} + P_{\varphi_1} + P_{\beta} + P_{\theta})}$$

$$\frac{2(M_{\theta}P_{\varphi} - M_{\varphi}P_{\theta}) + n\,(M_{\beta}P_{\varphi_1} - M_{\varphi_1}P_{\beta}) + (1-n)\,(M_{\varphi_1}P_{\varphi} - M_{\varphi}P_{\varphi_1}) +}{1}$$

$$\frac{+(1+n)\,(M_{\theta}P_{\varphi_1} - M_{\varphi_1}P_{\theta})}{1} = 0$$

(50)

إن المعادلة (50) تمثل معادلة الحالة الحرجة لعنصر الأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون في حالة السيلان (التلدن) من جهتي المقطع الوسطي، وهي تربط بين كل متحولات الحالة الإجهادية-التشوهية في الحالة الحرجة . ولقد استخدمنا في العلاقة (50) الرموز الآتية .

$$M_{\varphi} = \mu\sin\varphi \quad ; \quad P_{\theta} = \mu.\theta \qquad M_{\theta} = -\mu.\sin\theta \quad (51)$$

$$M_\beta = -\frac{2}{3}K_1 \sin^3\varphi_1 + 2A\frac{(\varepsilon_T^C)^{K-1}}{E}\cdot\frac{\{\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^{K-1}[(1+K)(1-\gamma)}{(\cos\beta-\cos\varphi_1)^K}.$$

$$\frac{\cos\beta - K\cos\varphi_1 + (K\gamma+\gamma-1)\cos\propto].\cos\propto.\sin^2\propto d\propto\} - \{K\frac{1}{\cos\beta-\cos\varphi_1}.}{1}$$

$$\frac{\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K[(1-\gamma)\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma\cos\propto].\cos\propto\sin^2\propto d\propto}{1};$$

(52)

$$M_{\varphi_1} = 2K_1(\cos\beta-\cos\varphi)\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + 2A\frac{(\varepsilon_T^C)^{K-1}}{E}\cdot\frac{\{\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K}{(\cos\beta-\cos\varphi_1)^K}$$

$$\cdot\frac{(-\cos\propto)\sin^2\propto d\propto\} + \{(\cos\beta-\cos\varphi_1)^{K+1} + (\gamma-1)\cos\varphi_1\sin\varphi_1\ \} -}{1}$$

$$\frac{-\left\{\frac{K}{\cos\beta-\cos\varphi_1}\cdot\int_\beta^{\varphi_1}(\cos\beta-\cos\propto)^K[(1-\gamma)\cos\beta-\cos\varphi_1+\gamma\cos\propto].\right.}{1}$$

$$\frac{(-\cos\propto\sin^2\propto d\propto}{1}$$

(53)

$$P_\varphi = -\mu(\varphi-\pi) + K_1(\pi-\varphi_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1) \quad (54)$$

$$P_{\varphi_1} = -2K_1 \sin\varphi_1 (\cos\beta - \cos\varphi) + 2A\left(\varepsilon\frac{C}{T}\right)^{K-1} \cdot \frac{1}{E} \quad \frac{\int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^K}{1}$$

$$\frac{\sin^2 \propto d\propto + (\cos\beta - \cos\varphi_1)^{K+1} + (1-\gamma)\sin\varphi_1 - \dfrac{K}{\cos\beta - \cos\varphi_1}.}{(\cos\beta - \cos\varphi)^K}$$

$$\frac{-.\int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^K [(1-\gamma)\cos\beta - \cos\varphi_1 + \gamma\cos\propto].\sin^2 \propto d\propto}{1} \quad ;$$

(55)

$$P_{\beta} = \mu\pi - K_1(\pi - \varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\varphi_1) - \frac{2A}{E}\left(\varepsilon\frac{C}{T}\right)^{K-1} \cdot \frac{\int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^{K-1}}{1}.$$

$$\cdot\frac{.[(1+K)(\gamma-1)\cos\beta + K\cos\varphi_1 - (\gamma + K\gamma - 1)]\cos\propto \sin^2 \propto d\propto +}{(\cos\beta - \cos\varphi_1)^K}$$

$$\frac{+\dfrac{K}{\cos\beta - \cos\varphi_1}\int_{\beta}^{\varphi_1} (\cos\beta - \cos\propto)^K [(1-\gamma)\cos\propto - \cos\varphi_1 + \gamma\cos\propto]\sin\propto^2 \, d\propto}{1}$$

(56)

المتحولات β و φ و φ_1 و θ تحقق المعادلة (50) وعند تعويضها في العلاقة (37) نحصل على الطول الحرج للعنصر. إذا عوضنا في كل الحدود الحاوية θ في المعادلة (50) قيمة الصفر أي $\theta = 0$ ، عندئذ بشكل سهل وبسيط نحصل من تلك المعادلة على معادلة الحالة الحرجة لحالة السيلان (التلدن) من جهة واحدة في المقطع الوسطي .

من المعادلات (40) و (42) يمكن أن يعبر عن المتحولات φ و θ بدلالة المتحولات φ_1 و β كالآتي :

$$\varphi = \arccos\left[(1-\frac{1}{n})\cos\beta + \frac{1}{n}\cos\varphi_1\right] \qquad (57)$$

$$\theta = \arc\cos\left[(1+\frac{1}{n})\cos\beta - \frac{1}{n}\cos\varphi_1\right] \qquad (58)$$

وبهذا الشكل، مسألة البحث عن علاقات الحالة الحرجة تؤول إلى حل المعادلتين غير الخطتين (50) و (25) بعد حساب الطول L من العلاقة (37) . ويتم حل هذه المعادلات الحاصلة من أجل البحث على علاقات الحالة الحرجة باستخدام الحاسبات الألكترونية .

وللحصول على العلاقات الحرجة عندما يخضع البيتون لمخطط برنولي المستخدم لفولاذ الأنبوب شكل (1-b) وليس للمخطط شكل (1-C) ، يجب أن نعوض في العلاقات الحرجة المعطاة وفق هذا البحث قيم الثوابت الآتية :

$$\gamma = 0 \quad ; \quad K = 1 \quad ; \quad A = \frac{\sigma_T^C}{\varepsilon_T^C} \qquad (59)$$

ولو أجرينا مقارنة حسابية للحمولات الحرجة في الحالتين ، عندما يحقق البيتون المعادلة (3) وعندما البيتون يخضع لمخطط برنولي كما ورد في المرجع [8] لحصلنا على أفضل النتائج عندما تتساوى مساحتا المنحني وشبه المنحرف لمخطط σ-ε للبيتون، في حين لاتختلف قيم الحمولات الحرجة عن بعضها بأكبر من 5% عند أخذ لامركزية نسبية $m \approx 0.13$.

4- الحدود الخطية على مجال العلاقات الحرجة :

إن حل علاقات الحالة الحرجة الحاصلة عند وجود قيم معطاة لـ m و σ بطريقة مباشرة وذلك من أجل البحث عن أصلهما أي معرفة قيم المتحولات الداخلة في تركيبهما يتطلب جهداً كبيراً، لذلك نستخدم الطريقة التحليلية –التخطيطية لإجراء الحل. وملخصها من العلاقة العامة للحالة الحرجة (50) والتي تربط المتحولات مع بعضها في الحالة الحرجة، يمكن أن نجد قيمة اللامركزية النسبية m كالآتي :

$$m = \frac{M_\varphi + M_{\varphi_1} + M_\beta + M_\theta}{P_\varphi + P_{\varphi_1} + P_\beta + P_\theta} - \frac{(M_\beta P_\varphi - M_\varphi P_\beta) + (M_\theta P_\beta - M_\beta P_\theta) + 2(M_\theta P_\varphi - M_\varphi P_\theta) +}{\frac{\sigma^*}{\sigma_T}(P_\varphi + P_{\varphi_1} + P_\beta + P_\theta)}$$

$$.\frac{+ n(M_\beta P_{\varphi_1} - M_{\varphi_1} P_\beta) + (1-n)(M_{\varphi_1} P_\varphi - M_\varphi P_{\varphi_1}) + (1+n)(M_\theta P_{\varphi_1} - M_{\varphi_1} P_\theta)}{1}$$

(60)

ولتسهيل عملية إجراء الحسابات لابدّ من إعطاء قيم لمتحولين اختياريين، وعلى سبيل المثال β و φ_1 ، وتحسب قيم المتحولين الباقيين θ و φ بدلالتهما وفق العلاقتين (57) و (58) .

وبإعطاء قيم للمتحولات β و φ و φ_1 و θ يمكن من العلاقات (25 , 37 , 60) أن نجد قيم m و L و σ^* المطابقة لهذه المتحولات. إن مجال تغيّر متحولات الزوايا المركزية هو $0°$ درجة مئوية وحتى $180°$. حيث تعطى خطوة التغير التدريجي للزوايا المركزية أي مقدار اختياري. وحسب القيم الحاصلة

لـ m و L و σ^* يمكن أن نرسم المخططات البيانية للتوابع $\frac{\sigma^*}{\sigma_T} = f(\frac{L}{R})$ و $m = f(\frac{L}{R})$ و $f = f(\frac{L}{R})$ وذلك بعد فرض قيم محددة لـ σ_T و E و μ و K و n وهذه المخططات البيانية تمثل مخطط الحالات الحرجة لعنصر الأنبوب المعدني المملوء بالبيتون عندما يخضع للضغط اللامركزي .

a- إن التحول من حالة السيلان (التلدن) من طرفي المقطع إلى حالة السيلان من جهة واحدة نحصل عليها من شرط $\theta = 0$. وبتعويض هذا الشرط في العلاقة (42) نجد :

$$2 \cos \beta - \cos\varphi - 1 = 0 \qquad (61)$$

من العلاقة (61) نجد :

$$\varphi = \arccos (2 \cos\beta - 1) \qquad (62)$$

وفي هذه الحالة يمثل خط التحول من منطقة السيلان بجهة واحدة عندما تكون منطقة الشد واقعة من جهة التحدب، أو حالة السيلان بجهة واحدة عندما يكون كامل المقطع في حالة الضغط ، أو حالة وجود السيلان من كلا طرفي المقطع العرضي.

b- عند تعويض قيمة $\beta=0$ في العلاقات (25 , 37 , 50) ، عندئذ من العلاقة (40) يمكن أن نكتب :

$$1 - \cos\varphi_1 - n\,(1 - \cos \varphi) = 0 \qquad (63)$$

C- عندما يكون طول العنصر $L = 0$ يتشكل في المقطع العرضي للعنصر المفصل اللدن. عندئذ تمتزج منطقتا اللدونة لجهتي الشد والضغط مع بعضهما بعضاً. وفي هذه الحالة يتم البحث عن القيم الحدية كالآتي :

$$m_{max} = \lim_{\varphi,\varphi_1,\theta \to \beta} m(\varphi,\varphi_1,\theta,\beta) \qquad (64)$$

$$\frac{\sigma^*_{max}}{\sigma_T} = \lim_{\varphi,\varphi_1,\theta \to \beta} \frac{\sigma^*}{\sigma_T}(\varphi,\varphi_1,\theta,\beta) \qquad (65)$$

إن التوابع (θ و β و φ_1 و φ)m و (θ و β و φ_1 و φ) $\frac{\sigma^*}{\sigma_T}$ والمعينة من العلاقات (50) و (25) تمثل حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ عند التعويض في العلاقات الحرجة بدلاً من θ و φ_1 و φ قيمة β ، إن الكشف (البحث) عن الشكل المعين $\frac{0}{0}$ لتابع يتكون من عدد من المتحولات يعدُّ كما هو معلوم، مسألة معقدة وصعبة. إن نظرية ميدر كما وردت في المرجع [9] تعطي حلاً خاصاً لحالة مسألة حلقة دائرية ليست كبيرة وملخصها تعدُّ أن المتحول β هو مقدار ثابت وأن باقي المتحولات θ و φ_1 و φ تسعى للوصول لهذه القيمة الثابتة. عند تعويض قيم φ و θ من العلاقتين (57 , 58) فإن

العلاقات $m(\varphi, \varphi_1, \beta, \theta)$ و $(\varphi, \varphi_1, \beta, \theta)$ $\frac{\sigma^*}{\sigma_T} = \frac{\sigma^*}{\sigma_T}$ تؤول إلى الشكل غير المعين $\frac{0}{0}$ كما في حالة تابع مكّون بمتحول واحد φ_1 . وفي هذه الحالة فإن التوابع m و $\frac{\sigma^*}{\sigma_T}$ تحقق شرط كاشي كما جاء في المصدر [9] ونحصل على القيم الحدية لـ m_{max} و $\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_T}\right)_{max}$ كما هي معينة في العلاقات (60 و25) .

الخلاصة و النتائج:

تكمن أهمية هذا البحث في وضع طريقة حسابية لدراسة الحالة الإجهادية- التشوهية من أجل استقرار العناصر الإنشائية المكونة من أنابيب فولاذية مملوءة بالبيتون تعمل تحت تأثير الضغط اللامركزي. حيث تبدأ هذه العناصر بفقدان استقرارها عندما تصل فيها التشوهات اللدنة قيمها الحدية والموافقة لحالة توازن العزوم الخارجية مع العزوم الداخلية .و كذلك تم توضيح كيفية حل المعادلة الحرجة لعنصر الأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون عند وجود السيلان (التلدن) من جهتي المقطع ، حيث تربط هذه المعادلة بين كل متحولات الحالة الإجهادية-التشوهية في الحالة الحرجة . و بناء على قيم هذه المتحولات يتم تعيين قيم الحمولة الحرجة و طول العنصر الحرج و كذلك اللامركزية الحرجة .

تمّ اقتراح شكل جديد للعلاقة الرياضية $\sigma = f(\varepsilon)$ اللاخطية لعمل النواة البيتونية والذي يأخذ بالحسبان تغير المقاومات المختلفة للبيتون . حيث تم أخذ مخطط الإجهادات في منطقة الضغط للنواة البيتونية على شكل منحن، و هو الأقرب إلى الواقع لعمل البيتون على حين في المرجع [8] عدّ مخطط الإجهاد للجزء المضغوط في النواة البيتونية على شكل شبه منحرف و المخطط $\sigma - \varepsilon$ للفولاذ و البيتون مطابقاً لمخطط برنولي . و قد تبين أن أثر هذا التغير يكون كبيراً جداً في قيمة الحمولة الحرجة عندما تكون اللامركزية صغيرة $e = 0,1$. أما في حالة اللامركزية الكبيرة ($e = 2$ مثلا) فتكون قيم الحمولة الحرجة متقاربة مع نتائج [8] و لا يتجاوز الفرق بينهما 5 % .

وكذلك تمّ إيجاد معادلات الحالة الحرجة لعنصر الأنبوب الفولاذي المملوء بالبيتون في حالة حدوث السيلان من طرفي المقطع باستخدام طريقة جداءات لاغرانج غير المعينة. والتي ينصح باستخدامها لدراسة استقرار العناصر الإنشائية عند وجود حالات إجهادية في مقاطعها العرضية مرتبطة بعدد من المتحولات .

تمّ دراسة الحدود الخطية لمجال العلاقات الحرجة m و L و σ^* المتعلقة بقيم متحولات الزوايا المركزية β و φ و φ_1 و θ . وكذلك وضحنا شرط التحول من حالة السيلان (التلدن) من طرفي المقطع إلى حالة السيلان من جهة واحدة.

المراجع

1- Gardner N.I. Design of Pipe columns. «Engineering . J. », vol. 53/3 No.3 , 1979, P. 404-413.

2- Mataoa I. A. Opredelenie. Prochnost sostavnikh balok S trobo betonnim verkhnim poisom. Novie metodi rachota stroetelnikh konstrokts: Megvoz. Temat. SB. Tr.L. LISI , 1989.

3- Neogip, sen H. Chapment. Concrete- Filled Tubular steel columns under eccentric loading the structurael Eng. 47,No. 5 , 1975 .

4- Storogenko L.I, Trobobetonia Konstroktsi, Kiev , Bogivelnik, 1987.

5- Timoshenko S.P. Gere . M., Theory of Elastic Stability ,2/ed, Mc Graw- Hill, 1961.

6- Rosnovski V.A. troboetonom V mostostroni M. Transgel. Dorisdat, 1976.

7 – إبراهيم أحمد الجراد . دراسة توازن الأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون . المجلد الخامس عشر ، مجلة جامعة دمشق للعلوم الهندسية ، العدد الأول ص.ص. 63–91 . 1999 م .

8 - إبراهيم أحمد الجراد , غسان محمود . قدرة تحمل الأنابيب المعدنية المملوءة بالبيتون تحت تأثير الضغط اللامركزي ، مجلة إربد للبحوث و الدراسات . المجلد الثاني . العدد الأول ص.ص. 271 - 293 . 1999 .

9 – كيكن آ . أي , ترول ف . آ , سنجروفسكي ار . اس . منشآت من الأنابيب الفولاذية المملوءة بالبيتون . موسكو ، 144 صفحة . 1992.

. تاريخ ورود البحث إلى مجلة جامعة دمشق: ٢٠٠٠/٢/٢٢.