دراسة البلاطات الرقيقة تحت تأثير التدفقات الحرارية مع اعتبار عامل التمدد الطولي متغيراً مع درجة الحرارة

الدكتور شاهين غلاييني
قسم الهندسة الإنشائية
كلية الهندسة المدنية ـ جامعة دمشق

الملخص

يهدف هذا البحث إلى صياغة طريقة تحليلية فعالة لحل البلاطات الرقيقة و المعرضة لتدفقات حرارية على أحد سطوحها بشكل كامل، أما سطحها الآخر فيتعرض لتبادل حراري مع الوسط المحيط.

من أجل ذلك تم إيجاد معادلة توزيع درجة الحرارة مع عمق البلاطة و ذلك باستخدام تشكيل لابلاس وذلك باعتبار شروط التبادل الحراري مع الوسط المحيط، وتبين أنه عندما يصبح التبادل الحراري مساويا للصفر (معزولة) مع الوسط فإن هذه المعادلة تنطبق مع المعادلة المستخرجة في المراجع المختلفة.

بعد ذلك تم اعتبار أن عامل التمدد الطولي لمادة البلاطة α هو تابع لدرجة الحرارة $\alpha(T)$ وعليه تم إيجاد معادلات السهم للبلاطات الدائرية والمستطيلة وذات الاستناد البسيط، والتي بمعرفتها يمكن إيجاد عزوم الانعطاف وقوى القص وعزوم الفتل لهذه البلاطات.

مقدمة:

عند تعرض المنشآت الهندسية لتدفقات حرارية فإن ذلك ينعكس مباشرة على الوضعية الإجهادية والتشوهية لتلك الإنشاءات حيث تحصل زيادة في الانتقالات كما تزداد الإجهادات فيها.

لقد تمت معالجة هذه المشكلة بشكل واسع في أعمال عديدة إلا أنه لم يظهر هناك أي انعكاس لدراسة تأثير عامل التمدد الطولي لمادة البلاطة بصفته متغيراً مع درجة الحرارة، إذ عند تعرض عنصر لتدفق حراري تحصل استطالة في هذا العنصر مادام هذا التدفق الحراري موجوداً، ولكن الملاحظات المنطقية والتجارب /6/ تشير إلى أن تمدد العنصر ينخفض مع ازدياد درجة الحرارة، ومن ثمَّ فإن عامل التمدد الطولي هو تابع لدرجة الحرارة لهذا العنصر.

اعتماداً على هذه الملاحظة فقد تم في هذا البحث صياغة المعادلة التفاضلية للبلاطات الرقيقة وذلك بإدخال عامل التمدد الطولي كتابع لدرجة الحرارة $\alpha(T)$ بدلاً عن اعتباره ثابتاً. $\alpha=$ const.

بعد ذلك تم إيجاد معادلة توزع درجة الحرارة $T(z,t)$ في البلاطة حيث تتعرض هذه البلاطة لتدفق حراري منتظم على كامل سطحها ولا يشترط لهذا التدفق أن يكون ثابتاً مع الزمن، أما سطح البلاطة الآخر فيتم فيه تبادل حراري مع الوسط الخارجي، ولما كانت البلاطة رقيقة فإن التبادل الحراري في أطرافها مهمل /2/.

إن معادلة توزع درجة الحرارة المستخرجة بتأثير التدفقات الحرارية هي معادلة عامة يمكن استخدامها في جميع الإنشاءات الهندسية الرقيقة والتي تتبادل مع الوسط المحيط حرارة.

اعتماداً على المعادلة التفاضلية للبلاطات الرقيقة ومعادلة توزع درجة الحرارة تم إيجاد معادلات السهم والعزوم في البلاطات المستطيلة.

إن الهدف الأساسي في هذا البحث هو وضع طريقة تحليلية لدراسة توزع درجة الحرارة في البلاطات الرقيقة والمتجانسة عامة، والتي تتبادل مع الوسط الخارجي حرارة؛ وكذلك انعكاسها على الحالة الإجهادية والتشوهية آخذين بالحسبان تغير عامل التمدد الطولي $\alpha(T)$ مع تغير درجة الحرارة.

1- استخراج المعادلة التفاضلية للبلاطات الرقيقة بتأثير التدفقات الحرارية مع اعتبار عامل التمدد الطولي متغيراً مع درجة الحرارة $\alpha(T)$.

نعتبر في هذه المسألة أن αعامل التمدد الطولي متغير مع درجة الحرارة $\alpha(T)$.

من قوانين نظرية المرونة وعندما تؤثر قوى في عنصر (إضافة إلى تأثير الحرارة) فإنها في الحالة العامة تسبب إجهادات ناظمية $\sigma x, \sigma y, \sigma z$ وفق المحاور x,y,z. وتكون التشوهات النسبية الطولية وفق تلك المحاور هي /2 /:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha.T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha.T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha.T$$

حيث:

E: عامل المرونة لمادة البلاطة

ν: عامل بواسون وهو ثابت للعناصر المتجانسة

$T(x,y,z,t)$: تابع توزع درجة الحرارة في العنصر

α: عامل التمدد الطولي لمادة العنصر وهو ثابت

ولكن α في المسألة المدروسة هو تابع لدرجة الحرارة $\alpha(T)$؛ وهكذا تأخذ المعادلات السابقة الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha(T).T \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha(T).T \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha(T).T
\end{aligned} \tag{1}$$

واستناداً إلى الفرضيات المعمول بها في دراسة البلاطات الرقيقة / 3 / فإن $\sigma_z = 0$ وعليه فإن حل المعادلات (1) هو:

$$\begin{aligned}
\sigma x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \frac{E}{1-\nu}\alpha(T).T \\
\sigma y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\nu}\alpha(T).T
\end{aligned} \tag{2}$$

وهناك إجهادات مماسية τ_{xy} تعطى بالعلاقة:

$$\tau_{xy} = G.\gamma_{xy} \tag{3}$$

حيث إنَّ:

G: عامل مرونة المادة على القص

γ_{xy}: التشوه الناتج عن القص في المستوي (x,y)

حيث تم الافتراض أن المستوي (x,y) مار من المستوي المحايد للبلاطة. أما المحور z فهو عمودي على هذا المستوي.

اعتماداً على / 3 / يمكن استخراج المعادلة التفاضلية لبلاطات الرقيقة والمعرضة للحرارة على أحد سطوحها وهي :

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 . \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \frac{1}{D}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}) = \frac{P(x,y)}{D} \tag{4}$$

حيث إنَّ:

D: الصلابة الأسطوانية وتعطى بالعلاقة: $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

P(x,y): شدة الحمولة الموزعة على سطح البلاطة.

h: سماكة البلاطة.

W: الانتقال الشاقولي للبلاطة

تكتب هذه المعادلة بشكل مختصر كما يأتي:

$$\nabla^2(\nabla^2 W(x,y))=\frac{1}{D}[\nabla^2\phi(T)+P(x,y)] \qquad (5)$$

حيث إنَّ:

(M_T)- العزم الحراري):

$$\phi=-\frac{M_T}{1-\nu}$$

$$M_T=\int_{-h/2}^{+h/2} E.\alpha(T).T.z.dz$$

∇^2 : مؤثر لابلاس ويعطى بالعلاقة:

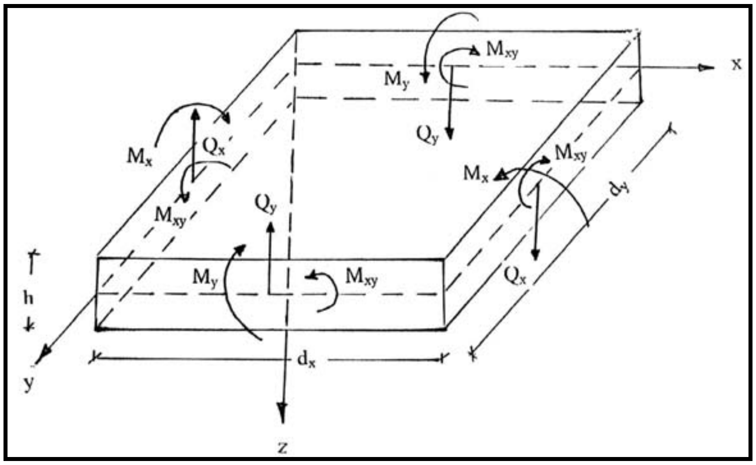
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

المعادلة(5) هي المعادلة التفاضلية نفسها للبلاطات الرقيقة باعتبار α= const ولكن الاختلاف هو في التابع ϕ الذي يأخذ بالحسبان $\alpha(T)$، وعليه يمكن حساب عزوم الانعطاف وقوى القص من العبارات الآتية /2/:

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)-\frac{M_T}{(1-\nu)}\\
M_y&=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-\frac{M_T}{(1-\nu)}\\
M_{xy}&=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(D\nabla^2 W + \frac{M_T}{1-\nu}\right) \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(D\nabla^2 W + \frac{M_T}{1-\nu}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

يوضح الشكل (5) توضع عزوم الانعطاف والفتل وقوى القص .



الشكل رقم 5.

2- استخراج معادلة توزع درجة الحرارة T في البلاطات الرقيقة في حال وجود تبادل حراري بين سطح البلاطة السفلي والوسط المحيط.

- لتكن لدينا البلاطة المبينة في الشكل (1) والتي تتعرض لتدفق حراري على كامل سطحها العلوي شدته q(t)،عندما (z=0) ويحصل تبادل حراري بين سطحها السفلي والوسط الخارجي عندما(z=h) حيث:(h سماكة البلاطة).

أما التبادل الحراري من الأطراف في حالة البلاطات المستطيلة فإنه مهمل إذا كان

$$h < \frac{a}{5} \quad , \quad (a < b)$$

/2/ حيث b,a أبعاد البلاطة.

وهكذا فإن معادلة الناقلية الحرارية (معادلة فورييه) هي تابع فقط للزمن t ولـ z أي T(z,t) / 2 / وتأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

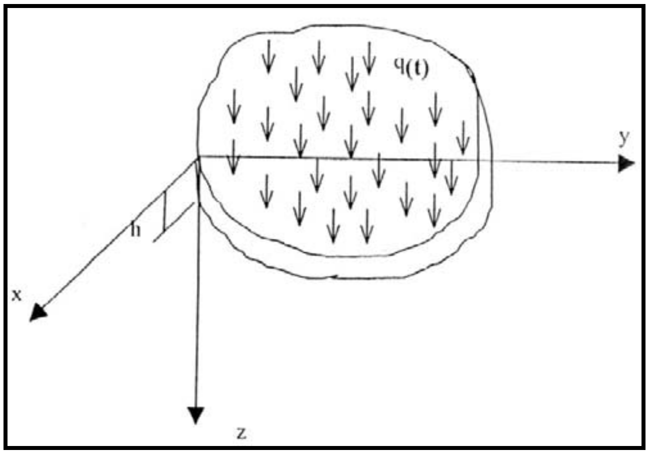
حيث: $\chi = \frac{\lambda}{\rho.c}$ وواحدته $[\frac{m^2}{sec}]$

λ: عامل الناقلية الحرارية $[Kal/m.sec.c°]$

ρ: كثافة مادة البلاطة $[Kg/m^3]$

c: السعة النوعية الحرارية لمادة البلاطة $[Kal/Kg.c°]$

q(t): التدفق الحراري على سطح البلاطة $[Kal/m^2.sec]$



الشكل رقم 1.

اعتماداً على ما سبق يمكن صياغة الشروط الحدية الحرارية الابتدائية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} z = 0 \Rightarrow \lambda\frac{\partial T}{\partial z} = -q(t) \\ z = h \Rightarrow \lambda\frac{\partial T}{\partial z} = H(T_0 - T) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$t = 0 \Rightarrow T(z,t) = T_0 \tag{11}$$

حيث H: عامل التبدل الحراري مع الوسط المحيط $[Kal/m^2.sec.c°]$

T_o: درجة حرارة البلاطة الابتدائية والتي هي مساوية لدرجة حرارة الوسط المحيط.
من الملاحظ أنه في المعادلة التفاضلية (9) هناك مشتقات مستقلة بالنسبة للزمن t وبالنسبة لـ z ولذلك سنستخدم تحويل لابلاس / 2، 1 / حيث نضرب المعادلة (9) بـ: $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt$ وتأخذ المعادلة الشكل الآتي:

$$\int_0^\infty T'' e^{-Pt} dt - \frac{1}{\chi}\int_0^\infty \dot{T}\, e^{-Pt} dt = 0 \qquad (12)$$

فحسب لابلاس نجد أن:

$$\overline{T} = \int_0^\infty T e^{-Pt}.dt, \overline{T''} = \int_0^\infty T'' e^{-Pt}.dt$$

أما الحد الثاني في المعادلة (12) فهو:

$$L\left\{\dot{T}\right\} = \int_0^\infty \dot{T}\, e^{-Pt} dt = -T_0 + P\overline{T}$$

كما أن:

$$\overline{q} = \int_0^\infty q(t).e^{-Pt}\, dt$$

$$\overline{T_O} = \int_0^\infty T_O\, e^{-Pt}.dt = \frac{T_O}{P}$$

نعوض في (12) ونطبق أيضاً تحويل لابلاس على الشروط الحدية الحرارية (10) فنحصل على:

$$\overline{T}'' - k^2\overline{T} = -\frac{T_O}{\chi} \quad : k^2 = \frac{P}{\chi} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow \lambda\overline{T'} = -\overline{q} \\ z = h &\Rightarrow \lambda\overline{T}' = H\frac{T_O}{P} - H\overline{T} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

إن حل المعادلة التفاضلية (13) يتكون من حلين عام وخاص.

الحل العام دون طرف ثانٍ وهو:

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k \Rightarrow \lambda_1 = +k; \lambda_2 = -k$$

ومن ثمَّ فإن الحل العام دون طرف ثانٍ هو $\overline{T_1}$

$$\overline{T}_1(z) = c_1\, e^{kz} + c_2\, e^{-kz} = c_1\, e^{u} + c_2\, e^{-u}$$

حيث u=k.z

وكما نعلم فإنه:

$$chu + shu = e^{u} \quad , chu - shu = e^{-u}$$

تأخذ المعادلة السابقة الشكل الآتي:

$$\overline{T}_1(z) = Ach(k.z) + Bsh(k.z)$$

أما الحل الخاص فيمكن إيجاده مباشرة وهو $\overline{T_2}$

$$\overline{T_2} = \frac{T_0}{k^2 \chi}$$

والحل العام هو:

$$\overline{T} = \overline{T_1} + \overline{T_2}$$

$$\overline{T}(Z) = Ach(k.z) + Bsh(k.z) + \frac{T_0}{k^2 \chi} \qquad (15)$$

يمكن تعيين الثابتين B,A بأن نعوض (15) في الشروط الحدية (14) فنجد أن:

$$A = \frac{\bar{q}}{\lambda.k} \frac{ch(kh) + \frac{H}{\lambda k} sh(kh)}{sh(kh) + \frac{H}{\lambda k} ch(kh)} \quad ; B = -\frac{\bar{q}}{\lambda k}$$

وتأخذ المعادلة (15) الشكل الآتي:

$$(16)\ \overline{T} = \frac{\bar{q}}{\lambda k}\left[\frac{ch(kh) + \frac{H}{\lambda k} sh(kh)}{sh(kh) + \frac{H}{\lambda k} ch(kh)}.ch(kz) - sh(kz)\right] + \frac{T_0}{k^2.\chi}$$

بفرض أن:

$$n = kh \quad , \frac{H.h}{\lambda} = m$$

فإن:
$$\left(\frac{H}{\lambda k}\right)=\frac{H.h}{\lambda}\,\frac{1}{k.h}=\frac{m}{n}$$

وعليه تأخذ المعادلة (16) الشكل الآتي:

$$\bar{T}=\frac{\bar{q}}{\lambda k}\left[\frac{chn+\frac{m}{n}shn}{shn+\frac{m}{n}chn}ch(k.z)-sh(k.z)\right]+\frac{T_0}{k^2\chi}$$

بفرض أن $\zeta=\frac{z}{h}$ فإن $kz=k.h.\frac{z}{h}=n\zeta$

وهكذا تأخذ المعادلة السابقة الشكل الآتي:

$$\bar{T}=\frac{\bar{q}h}{\lambda n}\left[\frac{chn+\frac{m}{n}shn}{shn+\frac{m}{n}chn}ch(n.\zeta)-sh(n\zeta)\right]+\frac{T_0}{k^2\chi}$$

أو:

$$\bar{T}=\frac{\bar{q}.h}{\lambda}\left[\frac{\frac{m}{n}sh[n(1-\zeta)]+ch[n(1-\zeta)]}{nshn+mchn}\right]+\frac{T_0}{k^2\chi} \qquad (18)$$

من أجل إرجاع المعادلة (18) إلى شكلها الأصلي نتبع ما يلي:

نستخدم صيغة التحويل هيفي سايد (Heaviside Expansion Formula) /1/ للمضروب الثاني من الحد الأول في (18):

$$\bar{F}=\frac{G(P)}{H(P)};\quad L^{-i}\left[\frac{G(P)}{H(P)}\right]=F=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{G(P_K)}{B'(P_K)}e^{P_K.t}$$

$$(19)\quad H(P)=0\rightarrow P_1,P_2,P_3,......P_K$$

$$H(P)=nshn+mchn=0\Rightarrow thn=-\frac{m}{n}$$

بفرض $n=i\beta$ فإن:

$$thi\beta=-\frac{m}{i\beta}\Rightarrow tg\beta=\frac{m}{\beta} \qquad (20)$$

نحل المعادلة (20) بيانياً بفرض:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= tg\beta \\ y_2 &= \frac{m}{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

من تقاطع التابعين y_2, y_1 يمكن إيجاد الجذور β_k

حيث: $(k = 1,2,3,....,\infty)$ شكل (2)

كنا قد بينا أن:

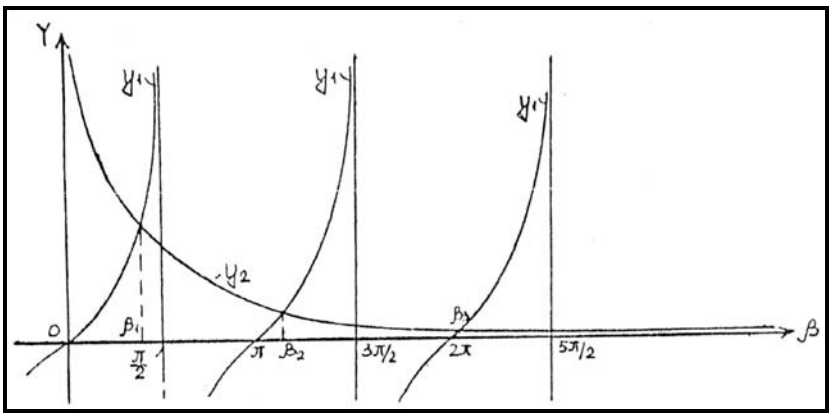
$$k^2 = \frac{P_k}{\chi} \quad ,n = kh; \quad n = i\beta$$

وعليه فإنه:

$$i\beta_k = k.h \Rightarrow -\beta_k^2 = k^2.h^2 \Rightarrow -\beta_k^2 = \frac{P_k}{\chi} h^2$$

ومن ثمَّ يكون:

$$P_k = -\frac{\beta_k^2}{h^2}.\chi$$



الشكل رقم 2.

ولدينا:

$$H(P) = nshn + mchn \Rightarrow \frac{dH(P)}{dP} = \frac{dH(P)}{dn}.\frac{dn}{dP} \Rightarrow \frac{dH(P)}{dn}$$
$$= n.chn + (1+m)chn$$

يمكن إيجاد $\frac{dn}{dP}$ كما يأتي:

$$n = kh = \sqrt{\frac{P_k}{\chi}}.h \Rightarrow \quad \frac{dn}{dp_k} = \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{P_k\chi}} \Rightarrow P_k = -\frac{\beta_k^2}{h^2}.\chi$$
$$\Rightarrow \frac{dn}{dP} = \frac{1}{2}.\frac{h^2}{\chi.\beta_k.i}$$

وعليه فإن: $\frac{dH(P)}{dP} = \left[nchn + (1+m)shn\right]\frac{1}{2}\frac{h^2}{\chi.\beta_K.i}$

نعوض في صيغة الإرجاع (19) فنجد أن:

$$F = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{\frac{m}{i\beta_k}.sh\left[i\beta_K(1-\zeta)\right] + ch\left[i\beta_K(1-\zeta)\right]}{i\beta_K.chi\beta_K + (1+m)\,shi\beta_K}.\frac{2.\chi.\beta_K.i}{h^2}.e^{-\frac{\beta_K^2}{h^2}.\chi.t}$$

أو كما هو معلوم من الرياضيات / 1 /

$$F = \sum_{K=1}^{\infty}\frac{\frac{m}{\beta_K}\sin\left[\beta_K(1-\zeta)\right] + \cos\left[\beta_K(1-\zeta)\right]}{\beta_K chi\beta_k + (1+m)\sin\beta_k}\;\frac{2\chi.\beta_K}{h^2}e^{-\frac{\beta_K^2}{h^2}.\chi.t} \qquad (22)$$

لو عدنا إلى المعادلة (18) فإن لها الشكل الآتي:

$$\overline{T} = \frac{h}{\lambda}.\overline{q}.\overline{F} + \frac{T_0}{P} \qquad P = k^2.\chi$$

فحسب نظرية الطي (convolution Theorem) / 1 / نجد أن:

$$T = L^{-1}\left[\overline{T}\right] = \frac{h}{\lambda}\int_0^t q(\tau).F(t-\tau).d\tau + T_0$$

وهكذا تصبح المعادلة العامة للانتقال الحراري هي:

$$T = T_0 + \frac{2\chi}{h.\lambda}.\left\{\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\beta_K\cos[\beta_K(1-\zeta)]+m\sin[\beta_k(1-\zeta)]}{\beta_K\cos\beta_K+(1+m)\sin\beta_K}.\int_0^t q(\tau).e^{-\frac{\beta_K}{h^2}.\chi.(t-\tau)}.d\tau\right\}$$

$$0 \le \zeta \le 1$$

إذا نقلنا مبدأ الإحداثيات إلى المستوى المحايد للبلاطة فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل الآتي:

$$T = T_0 + \frac{2\chi}{h.\lambda}.\left\{\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\beta_K\cos[\beta_K(0.5-\eta)]+m\sin[\beta_k(0.5-\eta)]}{\beta_K\cos\beta_K+(1+m)\sin\beta_K}.\int_0^t q(\tau).e^{-\frac{\beta_K}{h^2}.\chi.(t-\tau)}.d\tau\right\} \qquad (23)$$

$$-\frac{1}{2} \le \eta \le \frac{1}{2} \qquad m > 0$$

المعادلة (23) تمثل معادلة توزع درجة الحرارة مع عمق البلاطة عندما تتعرض لتدفق حراري شدته $q(t)$ على أحد سطوحها، وعندما يكون هناك تبادل حراري بين سطح البلاطة الآخر والوسط المحيط. ولهذا الحل معنى فقط عندما $m>0$ ومن أجل اختبار صحة العلاقة (23) نفرض أن $H=0 \Rightarrow m=0$ (حالة البلاطة معزولة ولا يحصل تبادل حراري مع الوسط المحيط وتأخذ المعادلة (23) الشكل الآتي:

$$T = T_0 + \frac{2\chi}{h.\lambda}\left\{\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\beta_K\cos[\beta_K(0.5-P)]}{\beta_K\cos\beta_K+\sin\beta_K}\int_0^1 q(\tau)\, e^{-\frac{\beta_K^2}{h^2}.\chi(t-\tau)}d\tau\right. \qquad (24)$$

أما جذور هذه المعادلة فتتحدد من (20):

$$m = 0 \Rightarrow \quad tq\beta = 0 \quad \Rightarrow \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \pi .....\beta_{K+1} = k\pi$$

إن الجذر الأول $\beta_1 = 0$ سوف يؤدي إلى عدم تعيين يمكن إزالته في (12.2) بتطبيق أوبيتال فنجد أن المعادلة (24) تأخذ الشكل الآتي:

$$T_{(\eta,t)} = T_0 + \frac{h}{\lambda}\left[\frac{\chi}{h^2}\int_0^t q(\tau)d\tau + \frac{2\chi}{h^2}\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^K\cos[\pi k(0.5-\eta)].\int_0^t q(\tau)e^{-K^2\pi^2\frac{\chi}{h^2}(t-\tau)}.d\tau\right]$$

بفرض أن التدفق الحراري على سطح البلاطة ثابت مع الزمن فإن:

$$q(t) = q_0 = const$$

تأخذ المعادلة السابقة الشكل الآتي:

$$T_{(\eta,t)} = T_0 + \frac{hq_0}{\lambda}\left[\frac{\chi.t}{h^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{k^2}\cos[\pi k(0.5-\eta)].(1-e^{-\frac{K^2\pi^2}{h^2}.\chi.t})\right] \quad (25)$$

عندما $m = 0$

إن هذه العلاقة يجب أن تنطبق مع العلاقة الواردة في المراجع / 2/ لحالة البلاطة المعزولة من سطحها الذي لايتبادل حرارة مع الوسط المحيط والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$T_{(\eta,t)} = T_0 + \frac{q_0.h}{\lambda}\left[\frac{\chi.t}{h^2} + \frac{3(0.5+\eta)^2 - 6(0.5+\eta) + 2}{6} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{k^2}\cos[k\pi(0.5-\eta)]e^{-\frac{K^2\pi^2}{h^2}.\chi.t}\right] \quad (26)$$

بمقارنة (25) و (26) يجب أن يكون:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^K}{k^2}\cos[\pi k(0.5-\eta)] = \frac{3(0.5+\eta)^2 - 6(0.5+\eta) + 2}{6}$$

من أجل التحقق من صحة هذه المساواة نرسم المنحني البياني للطرف الأول من أجل عدد حدود كافي لـ k ونرسم المنحني البياني للطرف الثاني فنجد أن هذين المنحنيين منطبقان.

3 – دراسة الوضعية الإجهادية والتشوهية للبلاطات المستطيلة ذات استناد بسيط على كامل محيطها معرضة لتدفق حراري شدته q(t) حيث α(T) هي لمادة البلاطة.

لإظهار تأثير الحرارة في البلاطة نفترض أن الحمولة الخارجية معدومة $P(x, y) = 0$

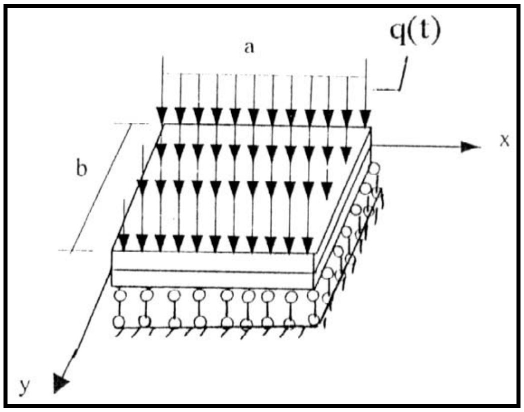
وعليه فإن المعادلة التفاضلية (5) تأخذ الشكل الآتي:

$$\nabla^2(\nabla^2 W) = \frac{\nabla^2\phi}{D}$$

أو:

$$\nabla^2(\nabla^2 W) = -\frac{\nabla^2 M_T}{D(1-v)} \tag{27}$$

فمن أجل البلاطة المبنية في الشكل (3)



الشكل رقم 3.

فإن الشروط الحدية اعتماداً على (7) هي :

$$\left.\begin{aligned} x = 0; a \Rightarrow W = 0, \quad M_X = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -\frac{M_T}{D(1-v)} : \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ y = 0; b \Rightarrow W = 0, \quad M_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -\frac{M_T}{D(1-v)} : \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

يمكن أن تبسط المعادلة (27) فيما إذا عدنا إلى /2/ وأدخلنا التابع φ (x,y):

$$\varphi = \nabla^2 W + \frac{M_T}{D(1-v)} \tag{29}$$

فمن الشروط (28) نجد بعد التعويض في φأنه:

$$x = 0; a \Rightarrow \varphi = 0$$
$$y = 0; b \Rightarrow \varphi = 0$$

ومن ثمَّ فإن:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

وهكذا ننتقل لحل مسألة أكثر سهولة وهي:

$$\nabla^2 W = \frac{-M_T}{D(1-v)} \tag{30}$$

بالشروط الحدية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} x = 0; a \Rightarrow \quad W = 0 \\ y = 0; b \Rightarrow \quad W = 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

نختار التابع W(x,y) الذي يحقق الشروط الحدية السابقة وهذا التابع هو:

$$W = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{a} . \operatorname{Sin}\frac{m\pi y}{b} \tag{32}$$

نحلل M_T في سلسلة مثلثية ثنائية فنجد أن: /4،3/

$$M_T = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{a} . \operatorname{Sin}\frac{m\pi y}{b} \tag{33}$$

والتي عندها تكون M_T متعلقة فقط بالزمن وعامل التحليل هو:

$$A_{nm} = \frac{16}{\pi^2 n.m} M_T$$

نعوض الآن (32) و (33) و (30) فنجد أن:

$$B_{nm} = \frac{16}{\pi^2 .n.m} \; \frac{M_T}{D(1-v)} \; \frac{1}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

وتأخذ معادلة السهم (32) شكلها النهائي الآتي:

$$W(x,y,t) = \frac{16.M_T}{\pi^4 .D(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi x}{a} . \operatorname{Sin}\frac{m\pi y}{b}}{n.m(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})} \tag{34}$$

إن هذه العلاقة منسجمة تماماً مع العلاقة الواردة في / 2 / إلا أن M_T هنا تأخذ $\alpha(T)$ بالحسبان.

بحساب السهم من (34) يمكن حساب العزوم وقوى القص من المعادلات (7)، (8).

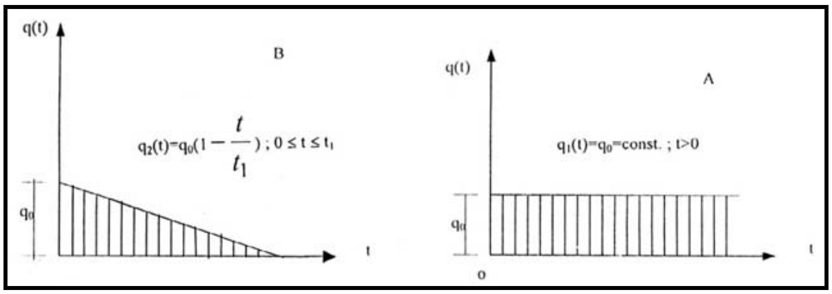
- **تعيين** $M_T(t)$

نفرض أن عامل التمدد الطولي $\alpha(T)$ متغير بشكل خطي مع الزمن/5/ كما في الشكل (4) وعليه فإن:

$$\alpha(T) = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T_1}\right).T + \alpha_0$$

حيث α_0 عامل التمدد الطولي الموافق لدرجة الحرارة T_0

α_1 عامل التمدد الطولي الموافق لدرجة الحرارة $(T_1 + T_0)$



الشكل رقم 4.

وعليه فإنه من (6) نجد:

$$M_T = h^2 E \int_{-1/2}^{+1/2} \alpha(T)\ T(\eta, t).\eta.d\eta$$

$$M_T = h^2 E \int_{-1/2}^{+1/2} \left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{T_1}\right).T(\eta,l) + \alpha_0\right].T(\eta, t).\eta.d\eta$$

بجعل:

$$M_{T_1} = \alpha_0 E h^2 \int_{-1/2}^{+1/2} T(\eta, t).\eta.d\eta$$

$$M_{T_2} = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T_1}\right). Eh^2 \int_{-1/2}^{+1/2} T(\eta, t).\, T(\eta, t).\, \eta.d\eta$$

فإن:

$$M_T = M_{T_1} + M_{T_2}$$

ومن المعادلة (23) وبفرض أن:

$$L_K(\eta) = \beta_K \cos\left[\beta_K(0.5 - \eta)\right] + m\mathrm{Sin}\left[\beta_K(0.5 - \eta)\right]$$

$$R_K = \beta_K \cos\beta_K + (1 + m)\ \mathrm{Sin}\beta_K$$

$$\varphi_K(t) = \int_0^t q(\tau)\, e^{-\frac{\beta_K^2}{h^2}.\chi(t-\tau)} .d\tau$$

فإن المعادلة (23) تأخذ الشكل الآتي:

$$T(\eta, t) = T_0 + \frac{2\chi}{h.\lambda}\left\{\sum_{K=1}^{\infty} \frac{L_K(\eta)}{R_K}\, \varphi_K(t)\right\}$$

وعليه فإن:

$$M_{T1} = \alpha_0.E.h^2\left\{\frac{2\chi}{h.\lambda}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\beta_K(2+m) + \beta_K(m-2)\cos\beta_K - (2m - \beta_K^2)\,\mathrm{Sin}\beta_K}{2.\beta_K^2.R_K}.\varphi_K(t)\right\}$$

لحساب التكامل M_{T_2} نكتبه بالشكل الآتي:

$$M_{T2} = (\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T_1}).Eh^2 \int_{-1/2}^{+1/2} T_e(\eta, t).T_k(\eta, t).\eta.dn$$

حيث:

$$\beta_1 = \beta_1, \beta_2 = \beta_2, ...\beta_k = \beta_e$$
$$L_k(\eta) = L_e(\eta); R_k = R_e; \varphi_k(t) = \varphi_k(t)$$

وعليه فإن:

$$M_{T2} = (\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{T_1}).Eh^2.$$
$$\int_{-1/2}^{+1/2} T_0^2 + \frac{4\chi^2}{h^2\lambda^2}.\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty}(\frac{\varphi_K(t).\varphi_e(t)}{R_k.R_e}.L_k(\eta).L_e(\eta) + \frac{4\chi}{h\lambda}T_0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L_k(\eta)\varphi_k(t)}{R_k}\right\}.\eta.d\eta$$

حساب هذه التكاملات: $\int_{-1/2}^{+1/2} T_O^2 \eta.d\eta = 0$

$$I_{ke} = \int_{-1/2}^{+1/2} L_k(\eta).L_e(\eta).\eta.d\eta$$

$$I_{ke} = \int_{-1/2}^{+1/2} (m.\sin[\beta_k(0.5-\eta)] + \beta_k\cos[\beta_k(0.5-\eta)])(m.\sin[\beta_e(0.5-\eta)]$$
$$+ \beta_e\cos[\beta_e(0.5-\eta)])\eta.d\eta$$

$$I_{ke} = \int_{-1/2}^{+1/2} [m^2\sin[\beta_k(0.5-\eta)].\sin[\beta_e(0.5-\eta)] + \beta_k.\beta_e.\cos[\beta_k(0.5-\eta)].\cos[\beta_e(0.5-\eta)]$$
$$+ m\beta_e.\sin[\beta_k(0.5-\eta)].\cos[\beta_e(0.5-\eta)] + m\beta_k\cos[\beta_k(0.5-\eta)].$$
$$.\sin[\beta_e(0.5-\eta)]]\eta.d\eta$$

وعليه فإن:

$$I_{ke} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

حيث:

$$I_1 = m^2\Big[-\Big(\underbrace{\frac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{4(\beta_k-\beta_e)}}_{1} - \underbrace{\frac{\sin(\beta_k+\beta_e)}{4(\beta_k+\beta_e)}}_{2}\Big) + \underbrace{\frac{2\beta_k.\beta_e}{(\beta_k-\beta_e)^2(\beta_k+\beta_e)^2}}_{3}$$
$$+\Big(\underbrace{\frac{-\cos(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)^2}}_{4} + \frac{\cos(\beta_k+\beta_e)}{2(\beta_k+\beta_e)^2}\Big)\Big]$$

$$I_2 = \beta_k.\beta_e\Big[-\Big(\underbrace{\frac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{4(\beta_k-\beta_e)}}_{1} + \underbrace{\frac{\sin(\beta_k+\beta_e)}{4(\beta_k+\beta_e)}}_{2}\Big) + \underbrace{\frac{\beta_k{}^2+\beta_e{}^2}{(\beta_k-\beta_e)^2(\beta_k+\beta_e)^2}}_{3}$$
$$-\Big(\underbrace{\frac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)^2}}_{4} + \frac{\cos(\beta_k+\beta_e)}{2(\beta_k+\beta_e)^2}\Big)\Big]$$

$$I_3 = m.\beta_e\Big[\Big(\underbrace{\frac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)}}_{1} + \underbrace{\frac{\cos(\beta_k+\beta_e)}{2(\beta_k+\beta_e)}}_{2}\Big) - \Big(\underbrace{\frac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)^2}}_{3} + \underbrace{\frac{\sin(\beta_k+\beta_e)}{2(\beta_k+\beta_e)^2}}_{4}\Big)$$
$$+\underbrace{\frac{\beta_k}{2(\beta_k-\beta_e)(\beta_k+\beta_e)}}_{5} - \Big(\underbrace{\frac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{4(\beta_k-\beta_e)}}_{6} + \frac{\cos(\beta_k+\beta_e)}{4(\beta_k+\beta_e)}\Big)\Big]$$

$$I_4 = m.\beta_k\Big[\Big(\underbrace{\frac{\cos(\beta_e-\beta_k)}{2(\beta_e-\beta_k)}}_{1} + \underbrace{\frac{\cos(\beta_e+\beta_k)}{2(\beta_e+\beta_k)}}_{2}\Big) - \Big(\underbrace{\frac{\sin(\beta_e-\beta_k)}{2(\beta_e-\beta_k)^2}}_{3} + \underbrace{\frac{\sin(\beta_e+\beta_k)}{2(\beta_e+\beta_k)^2}}_{4}\Big)$$
$$+\underbrace{\frac{\beta_e}{2(\beta_e-\beta_k)(\beta_e+\beta_k)}}_{5} - \Big(\underbrace{\frac{\cos(\beta_e-\beta_k)}{4(\beta_e-\beta_k)}}_{6} + \frac{\cos(\beta_e+\beta_k)}{4(\beta_e+\beta_k)}\Big)\Big]$$

مع ملاحظة أن هذه التكاملات لها معنى فقط عندما $k \neq e$

أما عندما $K=e$ فإن المقادير $(\beta_k - \beta_e = 0; (\beta_k = \beta_e)$ تسبب حالات عدم تعيين يجب إزالتها:

1- من المعلوم أنه:

$$\lim\Big(\frac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{\beta_k-\beta_e}\Big) = 1$$
$$(\beta_k-\beta_e) \to 0$$

2- نعالج الحدين (3) و (4) في I_1 ولنحسب النسبة بينهما

$$\lim_{(\beta_k-\beta_e)\to 0}\left(\frac{\dfrac{\dfrac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)^2}}{}}{\dfrac{2\beta_k\cdot\beta_e}{(\beta_k-\beta_e)^2(\beta_k+\beta_e)^2}}\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\beta_k-\beta_e\to 0\\(\beta_k\to\beta_e)}}\left(\frac{(\beta_k+\beta_e)^2\cos(\beta_k-\beta_e)}{4\beta_k\cdot\beta_e}\right)=1$$

هذا يعني أن الحدين (3) و (4) متساويان عندما $\beta_k-\beta_e\to 0$ ، ولكن الحد الرابع ذو إشارة سالبة، ومن ثمَّ فمجموع الحدين مساوٍ للصفر.

3- بالطريقة السابقة نفسها نجد أن الحدين (3) و (4) في I_2 متساويان عندما $\beta_k-\beta_e\to 0$ ومجموعهما يساوي الصفر.

4- في I_3 نأخذ نسبة الحدين (1) ,(3) ونأخذ نهاية هذه النسبة عندما $\beta_k-\beta_e\to 0$ فنجد أن:

$$\lim_{\beta_k-\beta_e\to 0}\left(\frac{\dfrac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)}}{\dfrac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{2(\beta_k-\beta_e)^2}}\right)=\lim_{\beta_k-\beta_e\to 0}\left(\frac{\cos(\beta_k-\beta_e)}{\dfrac{\sin(\beta_k-\beta_e)}{\beta_k-\beta_e}}\right)=1$$

وهكذا فإن مجموع الحدين (1) و (3) يساوي الصفر.

بالطريقة نفسها نجد أن مجموع الحدين (5) و (6) في I_3 مساوٍ للصفر.

5- في التكامل I_4 نجد أن مجموع الحدود (1) و (3) و(5) و(6) مساوٍ للصفر.

وعليه فإن التكاملات السابقة (35) تأخذ القيم الآتية من أجل k=e:

$$I_1{}' = m^2\left[-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sin 2\beta_k}{8\beta_k}\right)+\frac{\cos 2\beta_k}{8\beta_k^2}\right]$$

$$I_2{}' = \beta_k{}^2\left[-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sin 2\beta_k}{8\beta_k}\right)-\frac{\cos 2\beta_k}{8\beta_k^2}\right]$$

$$I_3{}' = m\beta_k\left[\frac{\cos 2\beta_k}{4\beta_k}-\frac{\sin 2\beta_k}{8\beta_k{}^2}-\frac{\cos 2\beta_k}{8\beta_k}\right]$$

$$I_4{}' = m\beta_k\left[\frac{\cos 2\beta_k}{4\beta_k}-\frac{\sin 2\beta_k}{8\beta_k{}^2}-\frac{\cos 2\beta_k}{8\beta_k}\right]$$

نلاحظ أن:

$$I_3{}' = I_4{}'$$

وعليه فإن مجموع هذه التكاملات هو $I_k{}'$

$$I_k{}' = I_1{}' + I_2{}' + 2I_3{}'$$

- **حساب التكامل:** $\int_{-1/2}^{+1/2} L_k(\eta).\eta, d\eta$

$$\int_{-1/2}^{+1/2} L_k(\eta).\eta.d\eta = \frac{\beta_k(2+m)+\beta_k(m-2)\cos\beta_k-(2m-\beta_k{}^2)\sin\beta_k}{2\beta_k{}^2}$$

اعتماداً على ما سبق يمكن إيجاد M_T :

$$M_T = 2\alpha_0.E.h.\frac{\chi}{\lambda}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k(2+m)+\beta_k(m-2)\cos\beta_k-(2m-\beta_k 2)s}{2\beta_k{}^2.R_k}\varphi_k(t)\right\}$$
$$+4(\frac{\alpha_1-\alpha_0}{T_1}).Eh.\frac{\chi}{\lambda}\left\{\frac{\chi}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{e=}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)\varphi_e(t)}{R_k.R_e}I_{ke}+\frac{\chi}{h.\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_k(t))^2}{R_k^2}I_k{}'\right.$$
$$\left.+T_0\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k(2+m)+\beta_k(m-2)\cos\beta_k-(2m-\beta_k{}^2)\sin\beta_k}{2\beta_k{}^2R_k}\varphi_k(t)\right]\right\}$$

أو بالشكل الآتي:

$$M_T = 2Eh.\frac{x}{\lambda}\left[\alpha_0+2\left(\frac{\alpha_1-\alpha_0}{T_1}\right)T_0\right].$$
$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k(2+m)+\beta_k(m-2)\cos\beta_k-(2m-\beta_k^2)\sin\beta_k}{2\beta_k^2.R_k}.\varphi_k(t)\right\}$$
$$+4\left(\frac{\alpha_1-\alpha_0}{T_1}\right)E.\frac{\chi^2}{\lambda^2}\left\{\sum_{K=1}^{\infty}\sum_{e=1}^{\infty}\left(\frac{I_{Ke}}{R_k.R_e}\phi_K(t).\phi_e(t)\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{K=1}^{\infty}\left(\frac{I_k{}'}{R_k^2}\right)\varphi_k(t)^2\right\}$$

(36)

مع الأخذ بالحسبان أن $k\neq e$ في السلسلة الثنائية.

بتعريض (36) في (34) تصبح معادلة الانتقال $W(x,y,z)$ محددة تماماً من أجل التدفق الحراري المعطى والتي على أساسها يمكن حساب العزوم وقوى القص في أي نقطة من البلاطة باستخدام المعادلات (7) ، (8).

4 - حالة بلاطة دائرية معرضة لتدفق حراري شدته $q(t)$ باعتبار $\alpha(t)$ ووجود تبادل حراري من سطحها السفلي مع الوسط الخارجي وذات استناد بسيط على كامل محيطها.

- لتكن لدينا بلاطة دائرية نصف قطرها R وارتفاعها h حيث ($h \le \frac{2R}{9}$)وبهذا الشكل فإن التبادل الحراري من الأطراف مهمل / 4 /؛ وعليه فإن معادلة توزع درجة الحرارة في عمق البلاطة (23) صالحة للاستخدام في البلاطات الدائرية هذه.

وضمن شروط التناظر المحوري ولتحديد الوضع الإجهادي والتشوهي للبلاطة يمكن كتابة المعادلة التفاضلية (4) بشكلها القطبي الآتي /6/

$$\frac{\partial^4 W}{\partial^4 r}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial^3 r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial W}{\partial r}=-\frac{1}{D(1-\nu)}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2} \qquad (37)$$

حيث: W(r,t) الانتقال الشاقولي للبلاطة

فعندما تكون البلاطة ذات استناد بسيط على كامل محيطها فإن الشروط الحدية هي اعتبار مبدأ الإحداثيات في مركز البلاطة.

$$r=R \Rightarrow \begin{Bmatrix} W(R,t)=0 \\ M_r(R,t)=\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{M_T(t)}{D(1-\nu)}=0 \end{Bmatrix} \qquad (38)$$

بعد تحديد انتقال البلاطة W(r,t) يمكن حساب العزوم القطرية M_r والحلقية M_θ من العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} Mr &= -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)-\frac{M_T}{1-\nu} \\ M_\theta &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}M_T \end{aligned} \qquad (39)$$

بفرض: $q_S=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2 M_T}{\partial r^2}$ فإن المعادلة التفاضلية (37) تكتب بالشكل الآتي / 6 /:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right]\right\}=-\frac{q_S . r}{D} \qquad 0\le \nu \le R \qquad (40)$$

إن حل (40) يمكن الحصول عليه بإجراء التكامل بالتتالي حيث تأخذ الشكل الآتي:

$$W(r,t) = -\int \frac{1}{r}[r\int\left\{\frac{1}{r}F_1(r)dr\right\}dr]dr + c_1\frac{r^2}{4}(\ln r - 1) +$$
$$+ c_2\frac{r^2}{4} + c_3 \ln r + c_4$$

فعندما $r=0$ فإن $W(r,t)$ يجب أن تأخذ قيمة منتهية ولذلك فإن $C1=C2=0$ ومن ثمَّ فإن:

$$W(r,t) = -\int \frac{1}{r}[\int r\left\{\int\frac{1}{r}F_1(r)dr\right\}dr]dr + c_2\frac{r^2}{4} + c_4 \quad (41)$$

حيث:
$$F_1(r) = \int \frac{q_S}{D}.r.dr$$

يمكن أن نكتب (41) بالشكل الآتي بعد إجراء المكاملة:

$$W(r,t) = -F_4(r) + C_2\frac{r^2}{4} + C_4$$

حيث:
$$F_4(r) = \int \frac{1}{r}F_3(r)dr; F_3(r) = \int rF_2(r)dr$$
$$F_2(r) = \int \frac{1}{r}F_{1(r)}dr$$

باستخدام الشروط الحدية (38) يمكن تحديد الثوابت $C4, C2$ والحصول على المعادلة النهائية للانتقال $W(r,t)$:

$$W(r,t) = F_4(R,t) - F_4(r,t) + \frac{R^2}{2(1+\nu)}\left[\frac{M_T}{D(1-\nu)} - F_4''(R,t) - \frac{\nu}{R}F_4'(R,t)\right].(1-\frac{r^2}{R^2}) \quad (42)$$

M_T العزم الحراري وهو محدد بالعلاقة (36)

وبالعودة إلى (39) يمكن حساب M_θ, M_r.

مثال:

بلاطة بيتونية مربعة الشكل $a = b = 4m$ معرضة لتدفق حراري ثابت شدته $q_0 = 4 \cdot 10^3 kcal/cm^2 \cdot sec$.

بفرض أن:

$$E = 3 \cdot 10^4\,\text{MPa}$$
$$\nu = \frac{1}{6}$$
$$\lambda = 2.8 \cdot 10^{-3}\,\text{kcal/cm} \cdot \text{sec} \cdot C^0$$
$$\chi = 5.8 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}^3/\text{sec}$$

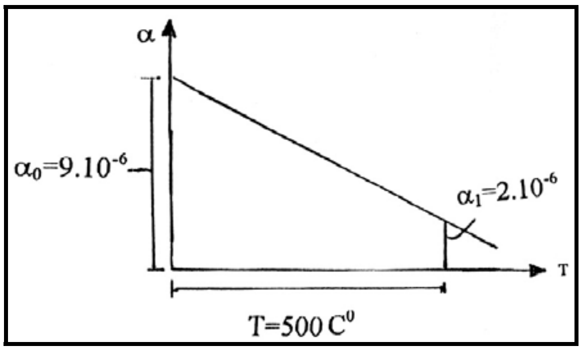
المطلوب تحديد السهم والعزم في منتصف البلاطة وذلك من أجل :

1- $m = 0$ حالة بلاطة معزولة تماماً من سطحها السفلي .

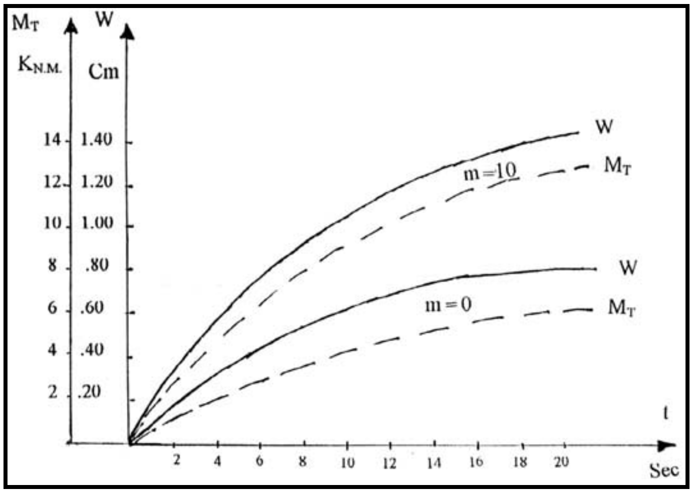
2- $m = 10$ حالة تبادل حراري .

علماً أن تغير عامل التمدد الطولي $\alpha(T)$ معطى بالشكل (6) .

إن قيم السهم W وعزوم الانعطاف M لمنتصف البلاطة موضحة بالشكل (7) .



الشكل رقم 6.



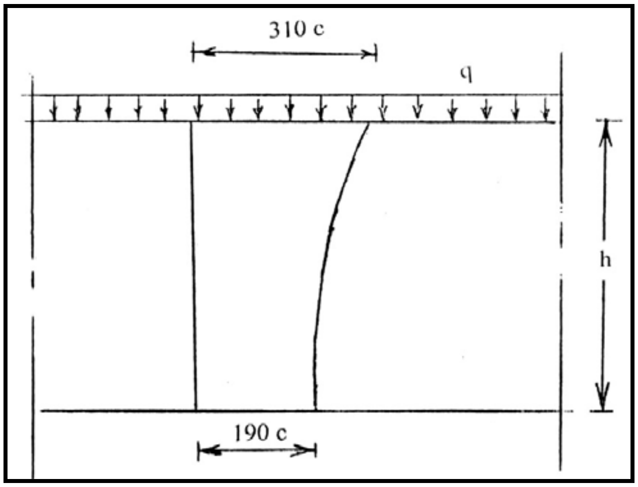
الشكل رقم 7.

شرح نتائج المثال الأساسية :

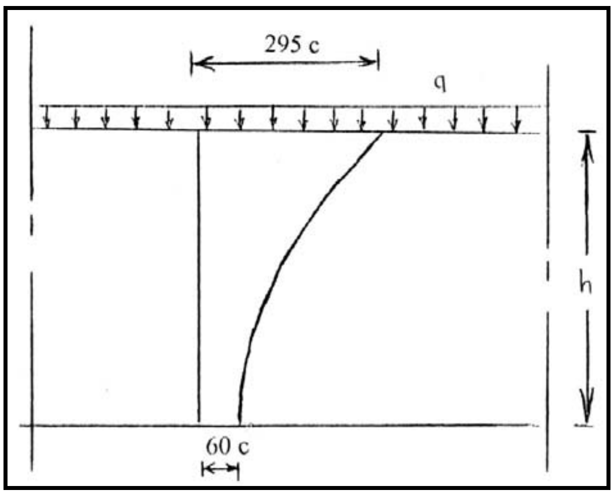
1-يتبين من مخطط عزم الإنعطاف M والانتقال W الشكل(7) أن العزم و الانتقال يزدادان بازدياد التبادل الحراري m و بالتالي فان الانتقال وعزم الإنعطاف في البلاطات الرقيقة والمعزولة من سطحها السفلي هي أقل من البلاطات ذات التبادل الحراري من سطحها السفلي مع الوسط المحيط و سبب ذلك هو ما يوضحه الشكل (8) لبلاطة رقيقة تتعرض لتدفق حراري على سطحها العلوي و معزولة من الأسفل. ومن الشكل(8) نجد أن التدرج الحراري قليل جداً وهو قريب من التوزع المنتظم وهذا لا يؤدي إلى ظهور عزوم كبيرة.أما الشكل (9) فهو يوضح بلاطة رقيقة تتعرض لتدفق حراري على سطحها العلوي و لكنها تتبادل الحرارة من سطحها السفلي مع الوسط المحيط و نتيجة لذلك فإن تدرج توزع درجة الحرارة يزداد وهذا الإزدياد ينعكس بدوره على زيادة في العزوم.

2-من الشكل(7) و مع إزدياد درجة الحرارة فإن عامل التمدد الطولي ينخفض مع مرور الزمن وهذا ينعكس على السهمW و عزم الإنعطاف M,حيث بعد فترة زمنية كافية $t > 20\,\mathrm{sec}$ نلاحظ أن العزم و السهم يبقيا ثابتين مع إزدياد درجة الحرارة .

ملاحظة: في هذه الدراسة تم اهمال الوزن الذاتي للبلاطة وتمت دراسة التأثيرات الناتجة عن التدفق الحراري.



الشكل رقم 8. توزع درجة الحرارة بعد مضي 5 sec لبلاطة معزولة m=0
(نلاحظ تدرجاً ضعيفاً في منحني توزع درجة الحرارة)



الشكل رقم 9. توزع درجة الحرارة بعد مضي 5 sec لبلاطة غير معزولة m=10
(نلاحظ تدرجاً كبيراً في منحني توزع درجة الحرارة)

الخلاصة

تم في الدراسة السابقة الإشارة إلي النقاط الهامة الآتية:

1- إيجاد معادلة التوزع الحراري (توزع درجة الحرارة) مع العمق للبلاطة و باعتبار شروط التبادل الحراري مع الوسط المحيط، وتعدُّ هذه المعادلة عامة من أجل البلاطات الرقيقة. كما تبين أنه عندما يكون التبادل الحراري مع الوسط المحيط معدوماً (البلاطة معزولة) فإن هذه العلاقة تنسجم مع العلاقات الواردة في / 2/ .

2- اعتبار تغير عامل التمدد الطولي لمادة البلاطة بوصفه تابعاً لدرجة الحرارة، و هذا ما يؤدي إلى انعكاسه على الوضعية الإجهادية و التشوهية للبلاطة.

3- إيجاد معادلات السهم للبلاطات الدائرية و المستطيلة باعتبار $\alpha(T)$ و قد تبين من خلال الدراسة أنه إذا كان $\alpha(T) = Const.$ فإن علاقات السهم هذه تنسجم مع ما هو وارد في /2/.

4- بإيجاد معادلات السهم يمكن إيجاد معادلات عزوم الانعطاف و قوى القص و عزوم الفتل .

5- تفيد الدراسة السابقة لمعادلة التوزع الحراري للبلاطة في إيجاد مقدار ارتفاع درجة الحرارة للبلاطة عند تعرضها لتدفق حراري الأمر الذي يستفاد منه في تحديد الفترة الزمنية التي تتحملها المنشآت الرقيقة عند تعرضها لهذا التدفق مع اعتبار شروط التدفق الحراري.

6- هناك بعض النتائج الأساسية و قد وردت في المثال السابق.

7- يمكن لهذه الورقة أن تشكل اسهاماً بحثياً للمهتمين في هذا المجال والراغبين في تطوير هذا الإتجاه .

المصطلحات العلمية المستخدمة:

عزم الانعطاف	BENDING MOMENT
شروط حدية	Boundary conditions
بلاطة دائرية	Circular slab
عامل التمدد الطولي	Coefficient of linear expansion
عامل الناقلية الحرارية	Coefficient of thermal conductivity
سهم (W)	Deflection
تشوه	Deformation
معادلة تفاضلية	Differential equation
تابع	Function
الصلابة الأسطوانية	Flexural rigidity
السعة الحرارية	Heat capacity
التدفق الحراري	Heat flux
مسند متمفصل	Hinged support
عامل المرونة (E)	Modulus of elasticity
عامل بواسون (ν)	Poisson's ratio
قوة القص	Shear force
بلاطة	Slab
حمولة موزعة بانتظام (q)	Uniform load

المراجع

1. Saboni, Raja, Mathematics /5/, Damascus university, 1982.
2. Boley, B & Weiner. J. Theory of thermal stress, New York, London, Johon Willy and Sons1960
3. Timoshenko, S.P. Theory of elasticity, "nayka domka"Kiev , 1972.
4. Kavlinka, A. Thermal elasticity for slabs,"Eidition KGY" Kiev,1971.
5. Kavlinka, A. Thermal elasticity,"Vishaya shcola"Kiev, 1975.
6. Jokove, A. Changes of coefficient of elasticity and Coefficient of linear expansion by changes of temperature for some materials"Mir"Moscow, 1959.

· تاريخ ورود البحث إلى مجلة جامعة دمشق: 2000/5/2.

Study of thin slabs under heat flux effects considering coefficient of linear expansion to be altered with temperature

Shahin Ghalayini

Department of structural enginee

ring Faculty of civil engineering
Damascus University

Abstract

This research aims to introduce a new effective method to analyze and solve thin slabs that are exposed to heat flux in full over one surface, whereas the other surface is exposed to heat exchange with the surrounding.

A new equation was introduced by the author in order to find heat distribution against the depth of the slab. The new equation is based on Lablace equations with consideration to heat exchange with the surrounds. It was found out that when heat exchange reaches zero (insulated), then the new equation is conformed to other equations in different references.

Consequently, the coefficient of linear expansion of slab material (α) was put to function at temperature $\alpha(T)$. Therefore, the deflections of circular and rectangular simple support slabs were found. Hence, and according to this, bending moment, shear force and torsional moments could be found for these slabs.