(١٢) درجة ٤

5

$$I = \int_0^1 \int_2^4 \int_0^3 (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

$$I = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \int_0^3 (x+y+z)\, dx = \int_0^1 dz \int_2^4 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy - xz\right]_0^3$$

$$I = \int_0^1 dz \int_2^4 \left(\frac{9}{2} + 3y + 3z\right) dy \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 30}$$

انتهى بعونه تعالى

أ. ماجد الخير

$\boxed{3}$ $I = \int_0^1 \int_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$ ٢ درجة (12)

$$= \int_0^1 \left[4y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3\right]_0^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{39}{8} - \frac{3}{2} x^2\right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{39}{8} x - \frac{1}{2} x^3\right]_0^1 \Rightarrow \boxed{I = \frac{35}{8}}$$

$\boxed{4}$ يكتب التكامل بالشكل درجة (12)

$$I = \int_0^1 x\, dx \int_0^{x^2} (1+y)^{\frac{1}{2}}\, dy$$

$$I = \int_0^1 x\, dx \left[\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2} = \frac{2}{3} \int_0^1 x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx -$$

$$- \frac{2}{3} \int_0^1 x\, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \left[\frac{x^2}{3}\right]_0^1$$

$$I = \frac{2}{3} \int_0^1 x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx - \frac{1}{3}$$

نفرض أن

$$1 + x^2 = t^2 \Rightarrow x\, dx = t\, dt$$

حدود $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$

نعوض نجد

$$I = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} t^4\, dt - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left[\frac{t^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{8\sqrt{2} - 7}{15}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \arcsin x \, dx$$

نفرض $\arcsin x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (5) درجات

$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة نجد أن

$$I_2 = \left[x \arcsin x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

(5) درجات

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{\pi}{2} - 1}$$

السؤال الثالث:

[1] $S = \int_0^1 y\,dy = \int_0^1 \sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$ (12) درجة

$$\Rightarrow S = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3} - 0\right] = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

[2] (12) درجة من الدستور $S = \frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$

المنحني متناظر بالنسبة للمحور القطبي يكفي حساب نصف المساحة

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2+\cos\theta)^2\, d\theta \Rightarrow S = \int_0^{\pi}\left(4 + 4\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$S = \left[\frac{9}{2}\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} \Rightarrow \boxed{S = \frac{9\pi}{2}}$$

سلم تصحيح مادة التكامل الفصل الأول عام ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ قسم الفيزياء

تكامل ١

السؤال الأول :

$$I_1 = \int x e^x \, dx$$

نفرض $x = u \Rightarrow dx = du$ & $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

(١٥) درجة

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة نجد أن

$$I_1 = \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = e^x(x-1) + c}$$

$$I_2 = \int \frac{x\,dx}{x^2+9} = \frac{1}{2} \ln(x^2+9) + C$$

(١٥) درجات

السؤال الثاني :

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \, . dx$$

نفرض $t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$ (٥) درجات

$$\Rightarrow x = \sqrt{t^2-1} \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

نوجد الحدود الجديدة للتكامل

عندما $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ (٥) درجات

$$I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$