سلم تصحيح مقرر التحليل العددي (1)
الفصل الأول - 2025-2024 - سنة ثانية: معلم رياضيات

السؤال الأول: املأ الفراغات، مبيناً العمليات الحسابية جانباً:

أ) $(100)_{10} = (202)_7$

الحل:

$$\begin{array}{r|c|c} 100 & 7 & 2 \\ 14 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 0 & & \end{array}$$

ب) $(534)_6 \times (22)_6 = (21032)_6$

الحل:

$$\begin{array}{r} {}^{111} \\ 534 \\ \times\; 2 \\ \hline 1512 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{111} \\ 534 \\ \times\; 2 \\ \hline 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ 15120 \\ \hline 21032 \end{array}$$

ج) $(4344)_5 + (2403)_5 = (12302)_5$

الحل:

$$\begin{array}{r} {}^{1\;1\;1} \\ 4344 \\ +\; 2403 \\ \hline 12302 \end{array}$$

د) $(35A.2C9)_{16} = (858.1740722656)_{10}$

الحل:

$$35A.2C9 = 3\times16^2 + 5\times16^1 + A\times16^0 + 2\times16^{-1} + C\times16^{-2} + 9\times16^{-3}$$

$$= 3\times16^2 + 5\times16^1 + 10\times16^0 + 2\times16^{-1} + 12\times16^{-2} + 9\times16^{-3}$$

$$= 768 + 80 + 10 + 0.125 + 0.046875 + 0.0021972656$$

$$= 858.1740722656$$

السؤال الثاني: لتكن الدالة $f(x) = x^3 - x - 2$

الطلب الأول: تحقق أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً حقيقياً واحداً ضمن المجال $[1,2]$.

الحل: حتى يكون للمعادلة جذراً حقيقياً يجب أن يتحقق الشرطان:

* الشرط الأول:

$$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2$$
$$f(2) = 8 - 2 - 2 = 4$$

الشرط الأول محقق: $f(1) \cdot f(2) < 0$

* الشرط الثاني:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

من الواضح أن $f'(x)$ متزايدة على المجال $[1,2]$

وبالتالي يكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذر حقيقي واحد على الأكثر داخل المجال $[1,2]$.

الطلب الثاني:

أوجد بطريقة التنصيف المتكرر (طريقة بولزانو) القيمة التقريبية التكرارية x_3 للمعادلة $f(x) = 0$.

الحل: بتنصيف المجال $[1,2]$ نجد أن:

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$f(1) = 1^3 - 1 - 2 = -2$$
$$f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5) - 2 = -0.125$$
$$f(2) = 2^3 - 2 - 2 = +4$$

المجال الجديد:

$$[1.5, 2]$$

$$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$$f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5) - 2 = -0.125$$
$$f(1.75) = (1.75)^3 - (1.75) - 2 = +1.609375$$
$$f(2) = (2)^3 - 2 - 2 = 4$$

المجال الجديد $[1.5, 1.75]$

$$x_2 = \frac{1.5+1.75}{2} = 1.625$$

$$f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5) - 2 = -0.125$$
$$f(1.625) = (1.625)^3 - (1.625) - 2 = +0.6660157$$
$$f(1.75) = (1.75)^3 - (1.75) - 2 = 1.609375$$

المجال الجديد $[1.5, 1.625]$ $\frac{1.5+1.625}{2} = 1.5625$

...ني:

...الثالث: كم مرة يجب تطبيق طريقة التنصيف (طريقة بولزانو) حتى نحصل على قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$ والخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.01$.

الحل: بتطبيق القانون التالي نحصل على عدد مرات تطبيق طريقة تنصيف المجال:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{2-1}{0.01}\right)}{\ln(2)} = 6.643 \approx 7$$

أي يجب تطبيق الطريقة 7 مرات حتى نحصل على جذر المعادلة $f(x)=0$ والخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.01$

الطلب الرابع: إذا اعتبرنا مركز المجال المذكور قيمة تقريبية لجذر المعادلة $f(x)=0$، أوجد الخطأ المطلق والخطأ النسبي باعتبار أن x_3 هي الجذر الحقيقي للمعادلة.

الحل:

مركز المجال المذكور (القيمة التقريبية) $= \bar{\xi} = 1.5$

القيمة الحقيقية لجذر المعادلة $= x_3 = \xi = 1.5625$

الخطأ المطلق:

$$\delta = |\bar{\xi} - \xi| = |1.5625 - 1.5| = 0.0625$$

الخطأ النسبي:

$$R = \frac{\delta}{|\xi|} = \frac{0.0625}{1.5625} = 0.04$$

السؤال الثالث: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة بالجدول التالي:

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	10	17

الطلب الأول:

أكتب جدول الفروق الأمامية، ثم أوجد قيمة تقريبية لـ $f'(1.8)$ باستخدام هذه الفروق الأمامية.

$$y'(1.8) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[1 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{4}(3)\right]$$

تكوين جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
	1				
		1			
	2		2		
		3		0	
	5		2		0
		5		0	
	10		2		
		7			
	17				

الطلب الثاني

عين صدودية نيوتن غريغوري الأمامية الملائمة للدالة $f(x)$ ومن الدرجة الثانية، ثم احسب قيمة تقريبية لـ $f(2.5)$؟

واحسب الخطأ المرتكب عند حساب هذه القيمة.

الحل: إن صدودية نيوتن غريغوري من الدرجة الثانية هي:

$$P_2(S) = f_0 + S\,\Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

حيث $S = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 0}{1}$ ، $h = 1$

$=$

بالتعويض بالـ S نجد:

$$= 1 + S(1) + \frac{S(S-1)\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$= 1 + S + S^2 - S = 1 + S^2$$

ومنه عند $x = 2.5$ نجد:

$$P_2(2.5) = 1 + 2.5^2$$

الخطأ المرتكب:

$$E(S) = \binom{S}{n+1}\Delta^{n+1} f_0 = \binom{S}{3}\Delta^3 f_0$$

$$= \frac{S(S-1)(S-2)(0)}{3!} = 0$$

الرابع:

[أوجد] قيمة تقريبية للتكامل: $\int_0^3 (x^3-3x+2)\,dx$

[عندما] $n=6$ بتطبيق قاعدتي أشباه المنحرف

وسيمبسون . ثم بيّن أي الطريقتين أفضل ولماذا؟

الحل: أولاً: طريقة أشباه المنحرف:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

وقانون أشباه المنحرف:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f^*(x)\,dx$$

$$= h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

وتكون نقاط تقسيم المجال:

$a = x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 2$

$x_1 = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow f(0.5) = 0.625$

$x_2 = 1 \Rightarrow f(1) = 0$

$x_3 = 1.5 \Rightarrow f(1.5) = 0.875$

$x_4 = 2 \Rightarrow f(2) = 4$

$x_5 = 2.5 \Rightarrow f(2.5) = 10.125$

$x_6 = 3 \Rightarrow f(3) = 20$

بالتعويض بالقانون نجد:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\frac{20+2}{2} + 0.625 + 0 + 0.875 + 4 + 10.125\right]$$

$$= \frac{1}{2}[26.62] = 13.31$$

ثانياً: طريقة سيمبسون:

$b=3\ ,\ a=0\ ;\ n = 2m = 6 \Rightarrow m=3$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+\dots+y_{2m-1}) + 2(y_2+y_4+\dots+y_{2m-2}) + y_{2m}\right]$$

$$\int_0^3 (x^3-3x+2)\,dx \approx \frac{3}{18}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) + y_6\right]$$

ونقسم مجال التكامل إلى 6 مجالات جزئية:

$a = x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$

$x_1 = 0.5 \Rightarrow y_1 = 0.625$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$

$x_3 = 1.5 \Rightarrow y_3 = 0.875$

$x_4 = 2 \Rightarrow y_4 = 4$

$x_5 = 2.5 \Rightarrow y_5 = 10.125$

$x_6 = 3 \Rightarrow y_6 = 20$

بالتعويض نجد:

$$\int_0^3 (x^3-3x+2)\,dx \approx \frac{3}{18}[2 + 4(0.625 + 0.875 + 10.125) + 2(0+4) + 20]$$

$$= \frac{3}{18}[2 + 4(11.625) + 2(4) + 20]$$

$$= \frac{3}{18}[2 + 46.5 + 8 + 20]$$

$$= \frac{3}{18}[76.5] = 12.7525$$

$$= 0.1667[76.5]$$

إن قاعدة سيمبسون أفضل لأن الخطأ المرتكب عند تطبيقها أقل من الخطأ المرتكب عند تطبيق قاعدة أشباه المنحرف .

السؤال:

...ج علاقة نيوتن رافسون التكرارية لحساب القيمة
...ريبية للجذر التربيعي لأي عدد حقيقي موجب a .
...طبق العلاقة الناتجة لإيجاد قيمة تقريبية لـ $\sqrt{5}$
وذلك بفرض أن القيمة الابتدائية $x_0 = 2.5$
حتى تصل للتقريب الثاني.

الحل: نفرض أن $x = \sqrt{a} \Leftarrow x^2 = a$

وبالتالي نحصل على المعادلة:

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

التي تمثل حلاً جذراً للعدد a .

من الواضح أن: $f'(x) = 2x$ وبتطبيق طريقة نيوتن رافسون نجد:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} + \frac{a}{2x_n} =$$

$$= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right]$$

وبفرض $a = 5$ ، $x_0 = 2.5$ فبتطبيق العلاقة المستخرجة نجد أن:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{a}{x_n}\right] = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[2.5 + \frac{5}{2.5}\right] = 2.25$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{a}{x_1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2.25 + \frac{5}{2.25}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4.4722\right]$$

$$= 2.2361$$