2025 - 2024، ... الفصل الأول - م التجارب -

① د. علي محمود

سلم تصحيح امتحان مقرر نظرية الاحتمالات /2/
لطلاب السنة الثالثة // إحصاء رياضي
الفصل الأول // 2025/2/9 // الدرجة : 100

- جواب السؤال الأول (18 درجة) :

① (12 درجة) أ - النهاية العليا للمتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n \equiv \limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

- النهاية الدنيا للمتتالية $(A_n)_{n\geq 1}$:

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n \equiv \liminf_{n\to+\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

- تكون المتتالية متقاربة إذا كانت النهاية العليا تساوي النهاية الدنيا.

ب (6 درجة) :

$$\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)' := \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)' \overset{\text{دومورغان}}{=} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)'\right) \overset{\text{دومورغان}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A'_k\right) := \liminf_{n\to\infty} A'_n$$

- جواب السؤال الثاني (10 درجات) : ليكن $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضاء احتمالياً معرفاً و $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية أحداث من $\mathcal{F}$ عندئذ سيكون لدينا ما يلي :

أ إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ متقاربة، سينتج : $P(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$

ج " " " متباعدة والأحداث مستقلة فإن : $P(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 1$

- جواب السؤال الثالث (12 درجة) :

يجب أن نبرهن أن $E|X+Y|^p < +\infty$ ولذلك لدينا : $|X+Y|^p \leq (|X|+|Y|)^p$

وبما أن التابع $f(x) = x^p$ من أجل $1 \leq p < +\infty$ و $x \geq 0$ محدب، وحسب متراجحة جينسن حيث $f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ ، $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ فإن :

$$|X+Y|^p \leq 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p) \Rightarrow E|X+Y|^p \leq 2^{p-1}(E|X|^p + E|Y|^p)$$

وبما أن X و Y $\in \mathcal{L}^p$ فإن $E|X|^p < +\infty$ و $E|Y|^p < +\infty$ وبالتالي نجد : $E|X+Y|^p < +\infty$.

- جواب السؤال الرابع (20 درجة) :

حسب متراجحة تشيبيشيف (أو ماركوف) :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X_n - a|^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{E(X_n - EX_n + EX_n - a)^2}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{E(X_n - EX_n)^2}{\varepsilon^2} + \frac{E(X_n - a)^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} + \frac{E(X_n - a)^2}{\varepsilon^2}$$

سلم التصحيح - الفصل الأول 2024 - 2025

وبأخذ نهاية الطرفين للمتراجحة السابقة عندما n تسعى للنهاية نجد أن:

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-a|\ge\varepsilon) \le \lim_{n\to+\infty}\frac{V(X_n)}{\varepsilon^2} + \lim_{n\to+\infty}\frac{E(X_n-a)^2}{\varepsilon^2}$$ (فرضاً)

وبالتالي

$$\le 0 + 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n-a|\ge\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} a$$ (تقارب احتمالي)

د. علي قبوق ②

- جواب السؤال الخامس (24 درجة): (4 درجات لكل تعريف):

- التقارب بالاحتمال: إذا تحققت العلاقة: $\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to+\infty} P(|X_n-X|\ge\varepsilon)=0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

- التقارب شبه أكيد: $P(\lim_{n\to+\infty} X_n = X)=1 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$

- التقارب بـ $\mathcal{L}^P$: $\lim_{n\to+\infty} E|X_n-X|^P=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\|X_n-X\|_p=0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^P} X$

- التقارب بالتوزيع: $\lim_{n\to+\infty} P(X_n\le x)=P(X\le x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} E(f(X_n))=E(f(X)) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

- ونقول إن المتتالية $(X_n)_{n\ge1}$ تخضع للقانون:

(أ) الضعيف للأعداد الكبيرة، إذا وُجد ثابت حقيقي μ بحيث يكون: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$ (تقارب احتمالي)

(ب) القوي: ... $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu$ (تقارب شبه أكيد) حيث $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

- جواب السؤال السادس (16 درجة):

يكفي أن نبرهن أن

$$E\left(\frac{S_n}{n}-EX_1\right)^2 = E\left(\frac{\sum X_i}{n}-EX_1\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ولذلك لدينا:

$$E\left(\frac{S_n}{n}-EX_1\right)^2 = E\left(\frac{1}{n^2}(S_n-E(S_n))\right)^2$$

حيث أن: (بسبب تماثل التوزيع)

$$E(S_n)=E(\sum X_i)=\sum E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} EX_1 = nEX_1$$

إذن:

$$E\left(\frac{S_n}{n}-E(X_1)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\cdot V(S_n) = \frac{1}{n^2}V(\sum X_i) \overset{\text{استقلال}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$\overset{\text{تماثل التوزيع}}{=} \frac{n}{n^2}\cdot V(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$$

وبما أن العزوم الابتدائية من الرتبة الثانية موجودة ومحدودة فإن $0<V(X_1)<+\infty$ وبالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(\frac{S_n}{n}-EX_1\right)^2 \le \lim_{n\to+\infty}\frac{V(X_1)}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}^2} EX_1$$

نهاية السلم د. علي قبوق