سلم تصحيح امتحان مقرر نظرية الاحتمالات /3/
لطلاب السنة الرابعة // إحصاء رياضيا
الفصل الأول // 13/ 2025/2 // الدرجة : 100

- جواب السؤال الأول (20 درجة) : (8 درجات لكل تعريف) :

★ متسلسلة ماركوف : نقول عن متسلسلة عشوائية $(X_n)_{n\geq 0}$ تأخذ قيمها في فضاء الحالة $(E,\mathcal{E})$، إنها متسلسلة ماركوف إذا حققت الشرط :

$$P(X_{n+k}=j / X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i) = P(X_{n+k}=j / X_n=i);$$
$$\forall i_0,i_1,\dots,i_{n-1},i,j \in E, n,k \in \mathbb{N}$$

★ المصفوفة العشوائية : نقول عن مصفوفة أنها عشوائية إذا كانت كل عناصرها غير سالبة ومجموع عناصر أي سطر يساوي الواحد .

★ الحركة البراونية (طورية وينر) : نقول عن طورية عشوائية $(X_t)_{t\geq 0}$ إنها طورية وينر المبتدئة أو المنطلقة من الصفر إذا تحقق :

① $X_0 \overset{a.s.}{=} 0$ ، ② المتغيرات العشوائية $X_{t_1}-X_{t_0}, \dots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ مستقلة مهما يكن $0\leq t_0<t_1<\dots<t_n$ (أي ذات تزايدات مستقلة).

③ X_t-X_s يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين $t-s$ وذلك من أجل أي t و s بحيث $s<t$ أي أن : $X_t-X_s \sim N(0,t-s)$ ، $\forall s,t\in\mathbb{R}^+, s<t$.

وإذا استبدلنا الشرط $X_0=0$ بالشرط $X_0=x$ عندها نحصل على طورية وينر المنطلقة من x.

★ خاصية فقدان الذاكرة : نقول عن متغير عشوائي مستمر X يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$ أنه يتمتع بخاصية فقدان الذاكرة إذا حقق الشرط :

$$P(X>t+s / X>t) = P(X>s) \; ; \; \forall t,s\in\mathbb{R}_+$$

وهو يكافئ الشرط 1 $P(X>t+s) = P(X>t).P(X>s)$

- جواب السؤال الثاني (20 درجة) :

(تعريفاً) $p_j^{(n)} \equiv \pi_j^{(n)} := P(X_n=j)$

$= P(X_n=j, \Omega) = P\left(X_n=j, \bigcup_{i\in E}\{X_0=i\}\right)$; ($\bigcup_{i\in E}\{X_0=i\}$ تجزئة لـ Ω)

$= P\left(\bigcup_{i\in E}\{X_n=j, X_0=i\}\right)$; (توزيع التقاطع على الاجتماع)

$= \sum_{i\in E} P(X_n=j, X_0=i)$, (تنافي الأحداث)

$= \sum_{i\in E} P(X_0=i).P(X_n=j / X_0=i)$; (قاعدة الاحتمال المركب)

د. علي قجوري

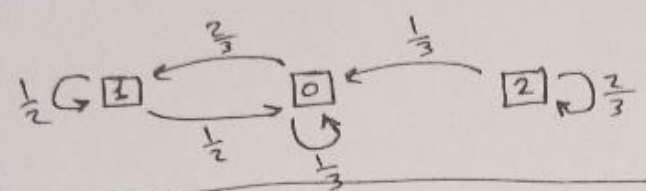
$$= \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} \cdot P_{ij}^{(n)} \quad ; \quad \text{(تعريف احتمالات الحالة ودوال الانتقال)}$$

$$= \sum_{i \in E} P_i^{(0)} \cdot P_{ij}^{(n)}$$

د. علي قجوري

- جواب السؤال الثالث (33 درجة):

① (18 درجة): مخطط الانتقال:



② (10 درجات): ليكن $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ متجه التوزيع المستقر للسلسلة، عندئذ

$$\pi = \pi \cdot P = (\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2, \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1, \frac{2}{3}\pi_2 \right)$$

بالمطابقة نجد:

(أ) $\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$

(ب) $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1$

(ج) $\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_2$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{3}{4}\pi_1$ (د)

$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{3}{4}\pi_1$

$\Rightarrow \pi_2 = 0$

ولدينا الشرط:

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \Leftarrow \pi_0 + \pi_1 = 1$ نستنتج $\boxed{\pi_0 = 1 - \pi_1}$

من (د) نستنتج: $1 - \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 \Leftarrow 1 = \frac{7}{4}\pi_1 \Leftarrow \boxed{\pi_1 = \frac{4}{7}} \Leftarrow \boxed{\pi_0 = \frac{3}{7}}$

إذن:

$$\boxed{\pi = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right)}$$

③ (5 درجات):

$$P(X_1=2, X_2=2, X_3=2, X_4=1, X_5=0 / X_0=1) =$$

$$P(X_1=2/X_0=1) \cdot P(X_2=2/X_0=1, X_1=2) \cdot P(X_3=2/X_0=1, X_1=2, X_2=2) \cdot$$

$$P(X_4=1/X_0=1, X_1=2, X_2=2, X_3=2) \cdot P(X_5=0/X_0=1, X_1=2, X_2=2, X_3=2, X_4=1)$$

(سلسلة ماركوف)

$$= P(X_1=2/X_0=1) \cdot P(X_2=2/X_1=2) \cdot P(X_3=2/X_2=2) \cdot P(X_4=1/X_3=2) \cdot P(X_5=0/X_4=1)$$

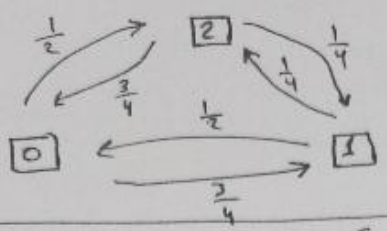
(دوال الانتقال)

$$= P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{22} \cdot P_{21} \cdot P_{10} = \boxed{0}$$

د. علي قبوي (3)

- جواب السؤال الرابع (25 درجة):

(1) (10 درجات): مخطط الانتقال:



(2) (10 درجات): متجه التوزيع المستقر: ليكن $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$ متجه التوزيع المستقر للمتالية،

عندئذ:

$$\pi=\pi\cdot P=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}&0&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}=\left(\frac{3}{4}\pi_1+\frac{3}{4}\pi_2,\ \frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_2,\ \frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \pi_0=\frac{3}{4}\pi_1+\frac{3}{4}\pi_2\\ (2) & \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_2\\ (3) & \pi_2=\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1-\pi_2=\frac{1}{4}\pi_2-\frac{1}{4}\pi_1\Rightarrow\frac{5}{4}\pi_1=\frac{5}{4}\pi_2\Rightarrow\boxed{\pi_1=\pi_2}$$

ولكن بالتعويض في (1) نجد: $\boxed{\pi_0=\frac{6}{4}\pi_1}$

فنجد: $\pi_0+\frac{4}{6}\pi_0+\frac{4}{6}\pi_0=1$ $\Leftarrow$ $\frac{14}{6}\pi_0=1$ $\Leftarrow$ $\frac{7}{3}\pi_0=1$ $\Leftarrow$ $\boxed{\pi_0=\frac{3}{7}}$

ومنه $\boxed{\pi_1=\pi_2=\frac{2}{7}}$ إذن:

$$\boxed{\pi=\left(\frac{3}{7}\approx 0.42,\frac{2}{7},\frac{2}{7}\approx 0.29\right)}$$

- جواب السؤال الخامس (15 درجة):

• إيجاد التوزيع الابتدائي (6 درجات): بما أنه في البداية كان لدينا ثلاثة صور أي $X_0=3$

وبالتالي التوزيع الابتدائي: $\pi^{(0)}=(0,0,0,1,0)$

(1) (3 درجات): المطلوب: $\pi_4^{(1)}$ ولذلك نوجد $\pi^{(1)}$:

$$\pi^{(1)}=\pi^{(0)}\cdot P^{(1)}=(0,0,0,1,0)(P)=(0,0,\tfrac{3}{4},0,\tfrac{1}{4})\Rightarrow\boxed{\pi_4^{(1)}=P(X_1=4)=\frac{1}{4}}$$

(2) (3 درجات): المطلوب $\pi_1^{(2)}$ وبالتالي نوجد $\pi^{(2)}$:

$$\pi^{(2)}=\pi^{(0)}\cdot P^{(2)}=\pi^{(1)}\cdot P=(0,0,\tfrac{3}{4},0,\tfrac{1}{4})(P)=(0,\tfrac{3}{8},0,\tfrac{5}{8},0)$$

$$\Rightarrow\boxed{\pi_1^{(2)}=P(X_2=1)=\frac{3}{8}}$$

(3) (3 درجات):

$$\boxed{\pi_3^{(2)}=P(X_2=3)=\frac{5}{8}}$$

نهاية السلم د. علي قبوي