سلم تصحيح امتحان مادة تحليل تابعي للإحصاء
للسنة الثانية إحصاء - الفصل الأول
١٣/٢/٢٠٢٤

السؤال الأول:
أكتب عبارة صح أمام العبارة الصحيحة، وخطأ أمام الخاطئة (3 درجات لكل عبارة)

١) الشرط $d(x,y)=d(y,x)\ \forall x,y\in X$ هو أحد شروط المسافة (صح)
٢) إتحاد مجموعتين مفتوحتين مجموعة مفتوحة (صح)
٣) داخل مجموعة جزئية في فضاء متري هو مجموعة تقاطعها الداخلية (صح)
4) لصاقة مجموعة A هو مجموعة النقاط الداخلية فيها (خطأ)
٥) نقول عن فضاء متري أنه تام اذا وجدت فيه متتالية كوشية متقاربة (خطأ)
٦) اذا كانت $\{x_n\}$ متتالية متقاربة في فضاء متري فهي كوشية (صح)
٧) الخاصة $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|\ (\forall x,y\in X)$ هي واحدة من خواص النظيم (صح)
٨) فضاء المتتاليات ℓ^∞ فضاء غير منتظم (صح)
٩) كل فضاء جداء داخلي فضاء منتظم بالضرورة (صح)
١٠) x نقطة ملاصقة للمجموعة A اذا وفقط اذا وجدت متتالية من عناصر A متقاربة من x (صح)
١١) الشرط $\langle x,x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$ هو أحد شروط الجداء الداخلي (صح)
١٢) الفضاء $\mathbb{R}$ تام (صح)
١٣) ليس كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم (خطأ)
١٤) كل فضاء منظم هو فضاء متري (صح)
١٥) مساواة متوازي الأضلاع هي $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\ \forall x,y\in X$ (خطأ)

السؤال الثاني: عرف الكلمات التالية: (٢٠ درجة)
المجموعة المفتوحة - النقطة الداخلية - الفضاء المتري - المجموعة المغلقة - المجموعة المحدودة.

المجموعة المفتوحة: نقول أن المجموعة الجزئية A في فضاء متري X مفتوحة اذا وجد لكل $x\in A$ عدد $r>0$ بحيث $N(x,r)\subseteq A$.
النقطة الداخلية: نقول أن النقطة $x\in X$ داخلية في مجموعة A اذا وجد عدد $r>0$ بحيث $N(x,r)\subseteq A$.

الفضاء المتري: هو مجموعة غير خالية X معرف عليها مسافة d

المجموعة المغلقة: نقول أن المجموعة A مغلقة اذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة

المجموعة المحدبة: نقول عن المجموعة $A \subseteq X$ أنها محدبة اذا تحقق الشرط
$$\{\alpha x+(1-\alpha)y : 0\leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad \forall x,y\in A$$

السؤال الثالث:
اثبت أن التابع $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $d(x,y)=\frac{|x-y|}{2} \; \forall x,y\in\mathbb{R}$
مسافة على $\mathbb{R}$ (10 درجة)

الحل: واضح أولاً أن $d(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$
ثانياً اذا كان $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{2}=0 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

ثالثاً: $d(x,y)=\frac{|x-y|}{2}=\frac{1}{2}|-(y-x)|=\frac{1}{2}|y-x|$
$=d(y,x)$

رابعاً: ليكن $x, y, z \in \mathbb{R}$
$$d(x,z)=\frac{|x-z|}{2}=\frac{|(x-y)+(y-z)|}{2}\leq\frac{1}{2}\left(|x-y|+|y-z|\right)$$
$$\Rightarrow d(x,z)\leq\frac{|x-y|}{2}+\frac{|y-z|}{2}=d(x,y)+d(y,z)$$
اذن متراجحة المثلث محققة والتابع d مسافة على $\mathbb{R}$.

السؤال الرابع (15 درجة)
برهن أنه اذا كانت المجموعتان A, B مفتوحتان في فضاء متري فإن المجموعة $A\cup B$ مفتوحة.

الحل: ليكن $x \in A\cup B \Leftarrow x\in A$ أو $x\in B$

في حال $x\in A$ و A مفتوحة اذن يوجد $r>0$ بحيث $N(x,r)\subseteq A$
ومنه $N(x,r)\subseteq A\cup B$

أما في حال $x\in B$ و B مفتوحة اذن:

يوجد $r>0$ بحيث $N(x,r)\subseteq B$ ومنه $N(x,r)\subseteq A\cup B$

اذن في الحالتين وجدنا $r>0$ بحيث $A\cup B \supseteq N(x,r)$

وذلك لكل $x\in A\cup B$ اذن $A\cup B$ مفتوحة

نهاية سلم التصحيح

١٣/٧/٢٠٢٤

أ. أحمد هابيل مدرس المقرر