سلم تصحيح تحليل (3) سنة 2 إحصاء في 2025

السؤال الأول

لتكن $x_0 \in I$ ولتكن $\varepsilon > 0$. بما أن المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I فإنه يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

عندما $n \geq N_1$ من أجل جميع قيم $x \in I$

لتكن $x \in I$ ولتكن n عدد طبيعي بحيث $n \geq N_1$

وبما أن $[f_n(x)]$ مستمرة على المجال I من أجل $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ يوجد عدد مثل $\delta > 0$ بحيث

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

وذلك عندما

$$|x - x_0| < \delta$$

ومنه يمكن القول أنه من أجل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

وذلك عندما $|x - x_0| < \delta$

وبالتالي $f(x)$ مستمر في x_0 وذلك $\forall x_0 \in I$

ومنه f مستمر على المجال I.

السؤال الثاني

1] $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$$

$$\Rightarrow P_n = \left(\frac{(1)(3)}{2 \cdot 2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right) \cdots \left(\frac{(n-2)(n)}{n-1 \;\; n-1}\right)$$

$$\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

2] $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+4}{(n+1)(n^2+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+4}{(n+1)(n^2+3)} = 0 < 1$$

حسب دالامبير متقاربة

3] $$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

نفرض

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^u\,du =$$

$$2e^u + c$$

ومنه $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

$$\lim_{t\to 0^+} \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_t^1$$

$$2e - \lim_{t\to 0^+} 2e^{\sqrt{t}} =$$

$$2e - 2 = 2(e-1)$$

والتكامل متقارب

1] $$a_n = \frac{2n}{3n+8} - \frac{\cos x}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

متقاربة

السؤال الثالث:

$\cancel{f(x) = x^2}$

1- جوار $x = 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$(x-2) \qquad (x-3)$$

$$A(x-2) + B(x-3) = 1 \Rightarrow$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$2A - 3B = 1 \Rightarrow +2B - 3B = 1 \Rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

السؤال الرابع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-3)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2+1)!}(x-3)^{n+1}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n(x-3)^n}\right|$$

$(2n+3)! = (2n+3)(2n+2)(2n+1)!$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 0 < 1$$

متقاربة دوما

$R=\infty \;/\; x\in]-\infty,+\infty[$

السؤال الخامس

$f(x)=x^2$

بما أن f دالة زوجية فإن $b_n=0$ $\quad a_0, a_n = ?$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$x^2 \quad \cos nx$

$2x \quad \frac{1}{n}\sin nx$

$2 \quad -\frac{1}{n^2}\cos nx$

$0 \quad -\frac{1}{n^3}\sin nx$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n\right] = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right]$$

حيث

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx \quad \forall x\in]-\pi,\pi[$$

$$S(\pm\pi) = \frac{\lim f(x) + \lim f(x)}{2} = \frac{\pi^2+\pi^2}{2} = \pi^2$$

$f(\pi) = \pi^2 \;/\; S(-\pi) = f(-\pi) = \pi^2$

$x = t+1 \Rightarrow t = x-1$

$$f(t) = \frac{1}{t-2} + \frac{-1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{-1}{2(-\frac{t}{2}+1)} + \frac{1}{1-t}$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(t)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$

$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1 \Rightarrow |x-1|<2$

$\cap$

$|x-1|<1 \Rightarrow |x-1|<1$

ومنه $\quad \underline{|x-1|<1}$

[2]

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

عندما $x=0$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

$x=1$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \frac{1}{2}$

أما $0\le x<1$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & x=1 \end{cases}$$

نلاحظ أن دالة النهاية غير مستمرة عند $x=1$ وكانت (f_n) مستمرة على المجال $[0,1]$ وبالتالي التقارب ليس منتظم