[illegible]

سلم تصحيح مقرر نظرية الاحتمالات (1) - الفصل الأول 2024 - 2025

السنة الثانية - احصاء رياضي

الدكتور [illegible]

السؤال الأول

①

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

لكل إجابة 6 درجات

$$M_X(t) = E\, e^{tX}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = y \Rightarrow x = \sigma y + \mu$$

$$dx = \sigma\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y + \mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2} \cancel{\sigma}\, dy$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[y^2 - 2\sigma t y \mp t^2\sigma^2\right]} dy$$

$$= \frac{e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - t\sigma)^2} dy$$

$$y - t\sigma = w$$

$$dy = dw$$

$$= \frac{e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw}_{\sqrt{2\pi}}$$

$$= e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

ليكن لدينا (A_n) متتالية متزايدة من الأحداث العشوائية

لنشكل منها متتالية (B_n) من الأحداث العشوائية المتنافية مثنى مثنى

$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 - A_1$$
$$B_3 = A_3 - A_2$$
$$\vdots$$
$$B_n = A_n - A_n$$

$$\bigcup_1^{\infty} B_n = \bigcup_1^{\infty} A_n \qquad A_n = \bigcup_1^{n} B_k$$

عبارة $(A_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة فرضاً $\Leftarrow$ $\lim A_n = \bigcup_1^{\infty} A_n$

$$\Rightarrow p(\lim A_n) = p\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) = p\left(\bigcup_1^{\infty} B_n\right)$$
$$= \sum_1^{\infty} p(B_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_1^{n} p(B_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} p\left(\bigcup_1^{n} B_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} p(A_n)$$

3

$X \sim Geo(p)$ $\Leftarrow$ $EX = \frac{1}{p}$

$$[(1-p)^x]' = x(1-p)^{x-1}.1$$

$$\sum_0^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)}$$

$$EX = \sum_x x f(x)$$
$$= \sum_1^{\infty} x\, p(1-p)^{x-1}$$
$$= p \frac{d}{d(1-p)}\left[\sum_1^{\infty} (1-p)^x \mp 1\right]$$
$$= p \frac{d}{d(1-p)}\left[\underbrace{\sum_0^{\infty} (1-p)^x}_{\text{هندسية}} - 1\right]$$
$$= p \frac{d}{d(1-p)}\left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right]$$

$Y \sim poi(\lambda_2)$ مستقلات $X \sim poi(\lambda_1)$

$Z = X + Y \sim poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$M_Z(t) = E\, e^{tZ}$$

$$= E\, e^{t(X+Y)}$$

$$= E\, e^{tX + tY}$$

خواص E

$$= E\, e^{tX} \cdot e^{tY}$$

X,Y مستقلات

$$= E\, e^{tX}\; E\, e^{tY}$$

$$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

$X \sim poi$
$Y \sim poi$

$$= e^{\lambda_1(e^t - 1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t - 1)}$$

$$= e^{\lambda_1(e^t - 1) + \lambda_2(e^t - 1)}$$

$$= e^{(e^t - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$\rightarrow Z = X + Y \sim poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$M_{X^*}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

السؤال الثاني :
(... درجة)

حصل على شحنة
(15) قطعة سيارة
(10) قطع رعد
احتمال القطعة معيبة (0.3)

أولاً
$\boxed{14}$

معنى القطعة سليمة / معيبة

⇐ تجربة برنولية ، وسيطها (0.3)

تكررت $n=15$ مرة

⇐ توزيع برنولي

$$X \sim b(n=15,\ P=0.3)$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \ ; \ x=0,1,\dots n$$

$$f(x) = \binom{15}{x} (0.3)^x (0.7)^{15-x} \ ; \ x=0,\dots,15$$

1) 21

2) 4

$$Ex = np \iff Ex = 15(0.3) = 4.5$$

$$Vx = npq \iff Vx = 15(0.3)(0.7) = 3.15$$

3) 6

$$p(X=0) = f(0)$$
$$= \binom{15}{0}(0.3)^0(0.7)^{15} = 4.74\times10^{-3}$$

$$p(X\geq1) = 1-p(X<1)$$
$$=1-[p(X=0)]$$
$$=1-(4.74\times10^{-3}) = 0.995$$

$$p(X>1) = 1-p(X\leq1)$$
$$=1-[p(X=0)+p(X=1)]$$
$$=1-[4.74\times10^{-3}+0.0305]$$
$$=1-(0.035)$$
$$=0.965$$

ثانياً
$\boxed{6}$

X السيارة $n_1=15$ $p_1=0.3$
Y الرعد $n_2=10$ $p_2=0.3$
مستقل

$$X+Y \sim b(\Sigma n_i,\ p)$$
$$\sim b(15+10,\ 0.3)$$
$$\sim b(25,\ 0.3)$$

$$E(X+Y) = 25(0.3) = 7.5$$

$$V(X+Y) = 25(0.3)(0.7) = 5.25$$

عندما نلاحظ أن

$$7.5 = np > 5$$
$$17.5 = nq > 5$$

علينا تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي باستخدام مبرهنة النهاية المركزية

$$(1<X+Y<3) = P\left(1-\tfrac{1}{2} < X+Y < 3+\tfrac{1}{2}\right)$$
$$=P\left(\tfrac{1}{2} < X+Y < \tfrac{7}{2}\right)$$
$$=P\left(\frac{0.5-7.5}{\sqrt{17.5}} < \frac{X+Y-7.5}{\sqrt{17.5}} < \frac{3.5-7.5}{\sqrt{17.5}}\right)$$
$$=P(-1.67<Z<-0.95)$$
$$=P(Z<-0.95)-P(Z<-1.67)$$
$$=\Phi(-0.95)-\Phi(-1.67)$$
$$=\Phi(1.67)-\Phi(0.95)$$
$$=0.9525-0.8289$$
$$=0.1236$$

السؤال الثالث
(... درجة)

الحل:

17

مصنع لإنتاج مصابيح كهربائية

X: عمر مصباح كهربائي ، متوسطه (0.001)

1) (4)

$X \sim Exp(\lambda = 0.001)$

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; ; \; x > 0$

$f(x) = 0.001 e^{-0.001x} \; , \; x > 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \; , \; x \geq 0$

$F(x) = 1 - e^{-0.001x} \; ; \; x \geq 0$

2) (4)

$EX = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow EX = \frac{1}{0.001} = 1000$

$VX = \frac{1}{\lambda^2} \Leftrightarrow VX = \frac{1}{(0.001)^2} = 1000000$

3) (9)

$P(X < 1000) = F(1000)$

$= 1 - e^{-0.001(1000)} = 0.632$

$P(X < 500) = F(500)$

$= 1 - e^{-0.001(500)} = 0.393$

$P(X > 500) = 1 - 0.393 = 0.607$

$P(500 < X < 1000) = F(1000) - F(500)$

$= 0.632 - 0.393$

$= \underline{0.239}$

يوجد طريقة ثانية لحساب الاحتمالات:

$P(X < 1000) = \int_0^{1000} f(x)\,dx$

$= \int_0^{1000} 0.001 e^{-0.001x}\,dx$

ثانياً

$\boxed{6}$

عينة حجمها $n = 50$

$X \sim Exp(\lambda)$

حسب مبرهنة النهاية المركزية

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\mu = EX = 1000$

$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{VX}{n} = \frac{1000000}{50} = 20000$

$P(\bar{X} \leq 750) = P\left(\frac{\bar{X} - 1000}{\sqrt{20000}} \leq \frac{750 - 1000}{\sqrt{20000}}\right)$

$= P(Z \leq -1.76)$
-1.77

$= \Phi(-1.76)$
-1.77

$= 1 - \Phi(1.76)$

$= 1 - 0.9608 = 0.0392$

$(0.9616) \quad (0.0384)$

السؤال الرابع (25 درجة)

X و Y مستقلان

$f(x)=\frac{1}{2}\ ;\ 0\le x\le 2$

$f(y)=\frac{1}{3}\ ;\ 0\le y\le 3$

$(U,V)=(X+Y,\,Y)$

8

1- دالة الكثافة لـ (U,V) (1) 6

$$\left.\begin{array}{l}u=x+y\\ v=y\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x=u-v}\quad \boxed{y=v}$$

$0\le x\le 2 \Rightarrow 0\le u-v\le 2$

$\boxed{v\le u\le 2+v}$ $\boxed{u=v}$ $\boxed{u=2+v}$

$0\le y\le 3 \Rightarrow \boxed{0\le v\le 3}$ $\boxed{v=0}$ $\boxed{v=3}$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$f_{(U,V)}(u,v)=f_{(X,Y)}(u-v,v)\cdot|J|$$

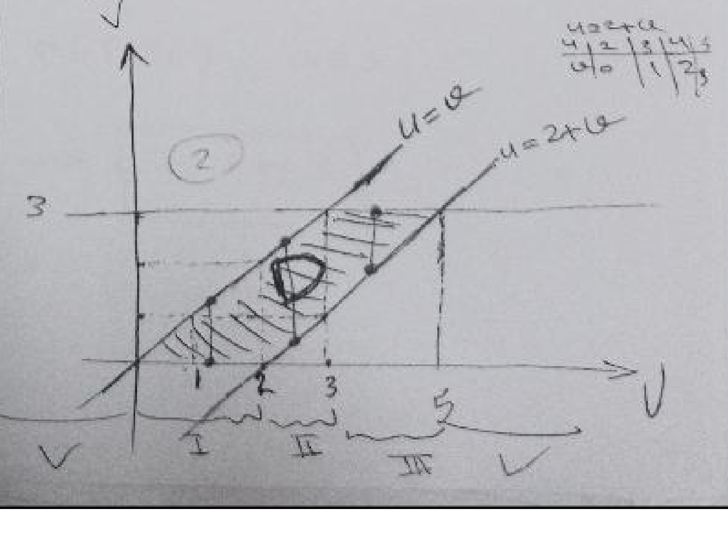
مستقلان Y,X $= f_X(u-v)\cdot f_Y(v)\cdot|J|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}\ ;\ (u,v)\in D$

$D=\{(u,v)\in\ v\le u\le 2+v$ و $0\le v\le 3\}$

$u=2+v$				
u	2	3	4	5
v	0	1	2	3

(2)



(17) (2)

- الهامشية f_U (12)

$\boxed{u<0}\Rightarrow f_U(u)=0$

$\boxed{0\le u\le 2}\Rightarrow f_U(u)=\int_{v=0}^{v=u} f_{(U,V)}(u,v)\,dv$

$=\int_0^u \frac{1}{6}\,dv=\frac{1}{6}v\Big]_0^u=\boxed{\frac{1}{6}u}$

$\boxed{2<u\le 3}\Rightarrow f_U(u)=\int_{v=u-2}^{u} f_{(U,V)}(u,v)\,dv$

$=\int_{u-2}^{u}\frac{1}{6}\,dv=\frac{1}{6}v\Big]_{u-2}^{u}$

$=\frac{1}{6}[u-u+2]=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\boxed{3<u\le 5}\Rightarrow f_U(u)=\int_{v=u-2}^{3} f_{(U,V)}(u,v)\,dv$

$=\int_{u-2}^{3}\frac{1}{6}\,dv=\frac{1}{6}v\Big]_{u-2}^{3}$

$=\frac{1}{6}[3-u+2]=\frac{5-u}{6}$

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{6}u & ;\ 0\le u<2\\ \frac{1}{3} & ;\ 2\le u<3\\ \frac{5-u}{6} & ;\ 3\le u\le 5\\ 0 & ;\ \text{غير ذلك}\end{cases}$$

الاحتمال (5)

$P(U<3)=\int_0^3 f(u)\,du$

$=\int_0^2 f(u)\,du+\int_2^3 f(u)\,du$

$=\int_0^2\frac{1}{6}u\,du+\int_2^3\frac{1}{3}\,du$

$=\frac{1}{6}\frac{u^2}{2}\Big]_0^2+\frac{1}{3}u\Big]_2^3$

$=\frac{1}{12}(4-0)+\frac{1}{3}(3-2)=\frac{4}{12}+\frac{1}{3}=\frac{8}{12}$

2021

$M_X(t) = (1-2t)^{-5}$; $t < \frac{1}{2}$ & $X \sim \chi^2(\nu)$

$M_X(t) = (1-2t)^{-\nu/2} \Rightarrow \frac{\nu}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{\nu = 10} \Rightarrow X \sim \chi^2(10)$

$p(X < 9.34) = \underline{0.5}$

$p(3.94 < X < 18.3) = p(18.3) - p(X < 3.94)$ 7

$= 0.95 - 0.05 = \underline{0.9}$

$p(X > c) = 0.1 \Leftrightarrow p(X \le c) = 1 - 0.1$

$p(X \le c) = 0.9$

$\Rightarrow \boxed{c = 16.0}$

$V(T) = \frac{8}{7}$ & $T \sim t(\nu)$ 2

$V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu-2} = \frac{8}{7}$

$8\nu - 16 = 7\nu$

$\boxed{\nu = 16} \Rightarrow T \sim t(16)$

$p(T > 2.12) = 1 - p(T \le 2.12)$

$= 1 - 0.975 = \underline{0.025}$ 7

$p(1.34 < T < 2.58) = p(T < 2.58) - p(T < 1.34)$

$= 0.99 - 0.90 = \underline{0.09}$

$p(T > c) = 0.45 \Leftrightarrow p(T \le c) = 1 - 0.45$

$p(T \le c) = 0.55$

$\Rightarrow \boxed{c = 0.128}$