حل نظرية العينات - الفصل الأول

2025 - 2 - 24

2023 - 2024

الأول

1- المقصود بالعشوائية هو أن لكل عنصر من عناصر المجتمع المدروس نفس الفرصة في الظهور في العينة، أي أن احتمال انتقاء أي عنصر من عناصر المجتمع هو $\frac{1}{N}$

2- نقول بأن المعاينة العشوائية بسيطة إذا كانت لجميع العينات الممكنة من الحجم n نفس الفرصة في الظهور وهي $\frac{1}{|\Omega|}$

3- لنوظف الترميز الثنائي التالي

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا العنصر رقم } i \text{ يحقق الخاصية} \\ 0 & \text{إذا لا يحقق} \end{cases}$$ فيكون

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{A}{N} = R$$

وبشكل مشابه لأجل عناصر العينة نجد

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{a}{n} = r$$

ونحن نعلم أنه في المعاينة العشوائية البسيطة ومهما كان نوع السحب ومهما كان نوع العينات المسحوبة فإن $E[\bar{x}] = \bar{Y}$ ولذا $E[r] = R$

الثاني

$N = \sum_{h=1}^{4} N_h = 178$ و $n = 89$ والحصص متناسبة لذا:

$$n_h = \frac{n}{N} N_h \Rightarrow n_1 = 20,\ n_2 = 16,\ n_3 = 30,\ n_4 = 23$$

4- حساب $\hat{var}(\hat{y})$: كون السحب بالإعادة فإن $\hat{S}_h^2 = s_h^2$ ولذا

$$\hat{var}(\hat{y}) = \sum_{h=1}^{4} \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h} s_h^2$$

$$= \frac{40(40-20)}{20} 4.7 + \frac{32(32-16)}{16} 13.9 + \frac{60(60-30)}{30} 6.3 + \frac{46(46-23)}{23} 1.8$$

$$= 1093.6$$

5- إن 90% مجال ثقة حول $\bar{Y}$ هو

$$\bar{Y} \in \left[\bar{x}_{st} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{N} \sqrt{\hat{var}(\hat{y})} \right]$$

$$\bar{x}_{st} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{4} N_h \bar{x}_h = \frac{1}{178}(7028.4) = 39.49$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{.1}{2}} = z_{.95} = 1.645$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \left[39.49 \pm 1.645 \frac{1}{178}\sqrt{1093.6}\right] = [39.18 , 39.8]$$

6- كون المعاينة بسيطة في كل طبقة فإن

$$\hat{E}[\bar{x}_3] = \hat{\bar{y}}_3 = \bar{x}_3 = 31.1$$

7- لأجل السحب من نوع منتظم لدينا $N = 40$ إذاً $k=2$

$$d_1 = I[10^2 D[10^{-3}(23(15)+25)]] = I[10^2(.37)] = 37$$

8- لأجل سحب الاحتمالات لدينا $N=46$ و $n=23$

$$R \in \left[r \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{N-n}{N(n-1)} r(1-r)}\right]$$

$$R \in \left[.7 \pm 1.645 \sqrt{\frac{46-23}{46(23-1)} (.7)(.3)}\right] = [.59 , .81]$$

9- نحسب $n_3 P(\bar{x}_3 > 23)$ حيث أن $n_3 = 30$ ولذا

$$\bar{x}_3 \sim N(E(\bar{x}_3), \sigma^2_{\bar{x}_3})$$

$$E(\bar{x}_3) = \bar{y}_3 = 22.4 , \quad \sigma^2_{\bar{x}_3} = \frac{N_3 - 1}{N_3} S'^2_3 \frac{1}{n_3} = \frac{60-1}{60}(3.7)\frac{1}{30} = .12$$

$$n_3 P(\bar{x}_3 > 23) = 30 P\left(Z > \frac{23-22.4}{.35}\right) = 30(1 - P(Z \leq 1.71)) =$$

$$30(1 - .9564) = 1.31 \Rightarrow$$ أي عينتان تقريباً

الشاهد

10- نظرية العينات: وهو الأسلوب الإحصائي المكون من طرق علمية ناظمة لعملية انتقاء العناصر عشوائياً في البحوث الإحصائية غير الشاملة وذلك بهدف استخلاص النتائج ثم تعميمها على مجتمع الدراسة بشرط أن يكون التعميم دقيقاً ما أمكن (أقل خطأ ممكن) محققاً لمعايير جودة النتائج.

11- الدقة: وتعني اتساق النتائج مع تكرار التجربة

$$\hat{T} = \frac{\sum_{i=1}^{100} u_i}{\sum_{i=1}^{100} x_i} = \frac{8504}{2696} = 3.15$$

أي أن كل ثلاث طارئة (تقريبا) يقابلها عامل.

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{.95} = 1.645$$ -12

$$T \in [\hat{T} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{T}}]$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{T}} = \frac{1}{\bar{x}} \sqrt{\frac{\sum u_i^2 - 2\hat{T}\sum u_i x_i + \hat{T}^2 \sum x_i^2}{n(n-1)}}$$

$$= \frac{100}{2696} \sqrt{\frac{724192 - 2(3.15)(229269) + (3.15)^2(72994)}{100(99)}}$$

$$= .02 \Rightarrow T \in [3.15 \pm 1.645(.02)]$$

$$T \in [3.12, 3.18]$$

سلم طوريات عشوائية (2) - الفصل الأول 2024 - 2025

الأول

1- إن $\sigma(Z_u) = \sigma(B_u ; 0 \le u \le t) = \mathcal{F}_t$ لذا فإن الدرجات

Z_t متكيف-$\mathcal{F}_t$; $\forall t \ge 0$. ولدينا Z_t قابل للتكامل لأن

(متراجحة المثلث)

$$E|Z_t| = E|B_t^2 - t| \le E(B_t^2) + t = 2t < +\infty$$

$$\forall\, 0 \le s \le t : E(Z_t | \mathcal{F}_s) = E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s)$$

$$= E[(B_t \pm B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t | \mathcal{F}_s]$$

$$= E(B_t - B_s)^2 + 2B_s E(B_t - B_s) + B_s^2 - t = t - s + 2B_s(0) + B_s^2 - t$$

$$= B_s^2 - s = Z_s \ (a.s.)$$

زيادات مستقلة وطبيعية

زيادات مستقرة

2- إن $\{Z_t\}_t$ مارتنكال موضعي وذلك لأن

كل مارتنكال هو مارتنكال موضعي بتعريف متتالية أزمنة التوقف

$$\forall n \in \mathbb{N} : \tau_n = n$$

الثاني 3-

$$\forall \underline{t} \in \mathbb{R}^m : \phi_{\underline{A}\underline{X}+\underline{b}}(\underline{t}) = E[\exp(i\underline{t}'(\underline{A}\underline{X}+\underline{b}))]$$

$$= e^{i\underline{t}'\underline{b}} E[e^{i\underline{t}'\underline{A}\underline{X}}] = e^{i\underline{t}'\underline{b}} E[e^{i\langle \underline{A}'\underline{t}, \underline{X}\rangle}]$$

$$= e^{i\underline{t}'\underline{b}} \cdot e^{i\underline{t}'\underline{A}\underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}'\underline{A}\underline{\Sigma}\underline{A}'\underline{t}} = e^{i\underline{t}'(\underline{A}\underline{\mu}+\underline{b}) - \frac{1}{2}\underline{t}'(\underline{A}\underline{\Sigma}\underline{A}')\underline{t}}$$

تابع فورييه للمتجه الغوصي $\underline{X}$

وهذا تابع فورييه لمتجه غوصي له التوزيع المطلوب

4- طالما أن X و Y طبيعيان مستقلان فإن المتجه $\underline{Z}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ غوصي وكذلك فإن المتجه $\underline{U}=\begin{pmatrix}aX+bY\\cX+dY\end{pmatrix}$ غوصي (لأنه تحويل خطي في مركبات $\underline{Z}$ الغوصي). بناء على ذلك، حتى يكون المتغيران $aX+bY$ و $cX+dY$ مستقلان يلزم ويكفي (حسب مبرهنة) أن يكون

$$cov(aX+bY,\ cX+dY)=0 \Rightarrow$$

$$ac\,var(X)+ad\,\underbrace{cov(X,Y)}_{0\ (\text{استقلال})}+bc\,\underbrace{cov(X,Y)}_{0}+bd\,var(Y)=0 \Rightarrow$$

$$ac\,\sigma^2+bd\,\sigma^2=0 \Rightarrow ac+bd=0\ ;\ \sigma^2\neq 0$$

5- حسب مبرهنة، بما أن $\{B_t\}_{t\geq 0}$ حركة براونية فهي طورية غوصية وهي متمركزة لأن $B_t\sim N(0,t)\ \forall t\geq 0$. ويبقى برهان تابع التغاير:

الحالة الأولى $\forall 0\leq s\leq t$:

$$C(s,t)=cov(B_t,B_s)=E[B_tB_s]=E[(B_t\pm B_s)B_s]$$

$$=E[B_s(B_t-B_s)+B_s^2]\ \overset{\text{تزايدات مستقلة}}{=}\ E(B_s)E(B_t-B_s)+E(B_s^2)$$

$$=0+s=s\wedge t$$

الحالة الثانية $\forall 0\leq t\leq s$:

$$C(s,t)=cov(B_t,B_s)=E[B_tB_s]=E[(B_s\pm B_t)B_t]$$

$$=E[B_t(B_s-B_t)+B_t^2]\ \overset{\text{استقلال}}{=}\ E(B_t)E(B_s-B_t)+E(B_t^2)$$

$$=0+t=s\wedge t$$

6-

التقارب في $\mathcal{L}^2$: $\lim\limits_{t\to\infty} E\left[\frac{B_t}{t}-0\right]^2=\lim\limits_{t}\frac{1}{t^2}E(B_t^2)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$

التقارب في $\mathbb{P}$ (بالاحتمال): $\forall\varepsilon>0:\ \lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{B_t}{t}-0\right|>\varepsilon\right)=\lim\limits_{t}\mathbb{P}(|B_t|>t\varepsilon)$

ماركوف

$$\leq\lim_{t\to\infty}\frac{E|B_t|}{t\varepsilon}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{2t}{\pi}}\frac{1}{t\varepsilon}=0$$

أو تشبيشيف

$$\leq\lim_{t\to\infty}\frac{E(B_t^2)}{t^2\varepsilon^2}=0$$

-7

$$E[Y_t] = E\left[e^{B_t}\right] \underset{\text{I}}{=} E\left[e^{\sqrt{t}B_1}\right] = M_{B_1}(\sqrt{t})$$

$$B_t \sim \sqrt{t}B_1$$

$$\underset{\text{I}}{=} e^{t/2} \; ; \; \forall t \geq 0 \longrightarrow$$

$$B_1 \sim N(0,1)$$

{طريقة ثانية للحل هي مكاملة $\int_{\mathbb{R}} e^{x} f_{B_t}(x)\,dx$ ثم إتمام مربع كامل}

-8

$$\text{cov}(Y_t, Y_s) = E[Y_t Y_s] - E(Y_t)E(Y_s)$$

$$\underset{\text{الطلب السابق}}{=} E[Y_t Y_s] - e^{t/2} \cdot e^{s/2} \; ; \; \forall t, s \geq 0$$

$$E[Y_t Y_s] = E\left[e^{B_t + B_s}\right]$$

الحالة الأولى $\forall 0 \leq s \leq t: \; E[Y_t Y_s] = E\left(e^{B_t - B_s + 2B_s}\right)$

$$\underset{\text{مستقلة}}{\overset{\text{تزايدات}}{=}} E\left(e^{B_t - B_s}\right) \cdot E\left(e^{2B_s}\right) \underset{\text{I}}{=} e^{\frac{t-s}{2}} \cdot e^{\frac{4s}{2}} = e^{\frac{t+3s}{2}}$$

$$B_t - B_s \sim N(0, t-s) \; , \; 2B_s \sim N(0, 4s)$$

$$\Rightarrow \text{cov}(Y_t, Y_s) = e^{\frac{t+3s}{2}} - e^{\frac{t+s}{2}} \; ; \; s \leq t$$

الحالة الثانية $\forall 0 \leq t \leq s: \; E[Y_t Y_s] = E\left(e^{B_t + B_s - B_t + B_t}\right)$

$$\underset{\text{مستقل}}{=} E\left(e^{B_s - B_t}\right) \cdot E\left(e^{2B_t}\right) = e^{\frac{s-t}{2}} \cdot e^{\frac{4t}{2}} = e^{\frac{s+3t}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(Y_t, Y_s) = e^{\frac{s+3t}{2}} - e^{\frac{t+s}{2}} \; ; \; t \leq s$$

9- وضوحاً ، لأن Y_t هو تحويل أسي في المتحول العشوائي B_t وهو تابع موجب دوماً ولذلك يستحيل أن تكون الطورية $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ مخوصية.