سلم تصحيح مقرر نظرية القياس

السؤال الاول اعط تعريف ما يأتي

١- الحلقة: ليكن $X \neq \emptyset$ و C صف من اجزاء X ($C \subseteq P(X)$)
نقول عن C انه حلقة اذا تحقق ما يلي

1) $\emptyset \in C$

2) $\forall A, B \in C \Rightarrow A \cup B \in C \wedge A \setminus B \in C$

٢- الجبر σ: نقول عن الصف $C \subseteq P(X)$ انه جبر σ اذا تحقق ما يلي

1) $\emptyset, X \in C$

2) $\forall A, B \in C \Rightarrow A \cup B \in C \wedge A \setminus B \in C$

3) $\forall A_1, \dots, A_n, \dots \in C \Rightarrow \bigcup_{i} A_i \in C$

٣- المجموعة القيوسة: ليكن $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوس
($X \neq \emptyset$ ، $\mathcal{A}$ جبر σ ، μ قياس) نقول عن A انها مجموعة قيوسة
اذا كانت عنصر من $\mathcal{A}$ اي ان

$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow$ قيوسة A

٤- التابع القيوس: ليكن
$(X, \mathcal{A})$ ، $(Y, \mathcal{B})$ فضاءان قيوسان

$f : X \longrightarrow Y$

نقول عن f انه تابع قيوس اذا كانت الصورة العكسية لاي مجموعة
قيوسة في المستقر هي مجموعة قيوسة في المنطلق اي ان

$\forall C \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$

٥- المجموعة المهملة: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قياس نقول عن F انها مهملة اذا تحقق
ما يلي

$\exists C \in \mathcal{A} ; F \subseteq C \wedge \mu(C) = 0$

٢- السؤال الرابع لكل طالب عليه ١٠ درجات

١- $\tilde{\tau} = \{ \phi, \{1\}, \{1,a\}, \{a\} \}$

٢- $A^{\circ} = \{ \phi, X, \{1\}, \{1,a\}, \{a\}, \{2,a,b\}, \{1,2,b\}, \{2,b\} \}$

٣- $\bar{\tau} = \{ \phi, X, \{1\}, \{1,a\}, \{a\} \}$

٤- $\bar{K} = \{ \phi \}$

السؤال الثالث لكل طالب ٥ درجات

١- نعرف متتالية جديدة كالتالي

$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus A_2 \ \ldots\ B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

بتداء

$\cup B_i = \cup A_i \qquad B_i \cap B_j = \phi \quad \forall (i \neq j)$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i - A_{i-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i - A_{i-1})$$

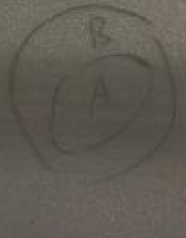
$$\cancel{= \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_3) - \mu(A}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\cancel{\mu(A_1)} + \cancel{\mu(A_2)} - \cancel{\mu(A_1)} + \cancel{\mu(A_3)} - \cancel{\mu(A_2)} + \ldots + \mu(A_n) - \cancel{\mu(A_{n-1})} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

٢- المطلوب إثبات

$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$



$B = (B \setminus A) \cup A \qquad (B \setminus A) \cap A = \phi$

$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$

≥ 0

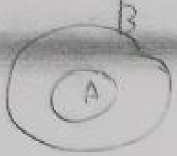
$\mu(B) \geq \mu(A)$

-٣-

تابع

$A \subseteq B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

$B = (B \setminus A) \cup A \qquad (B \setminus A) \cap A = \emptyset$



$\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup A) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$

$\Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

السؤال الرابع لبيان ان الدالة مقيسة

لدينا ثلاث حالات

١) $\lambda > 0$ (4)

$(\lambda f)^{-1}([a, \infty[) = \{x : \lambda f(x) \geq a\}$

$= \{x : f(x) \geq \frac{a}{\lambda}\}$

$= (f^{-1})([\frac{a}{\lambda}, \infty[)$

مجموعة قيوسة لان f مقيوسة

اذن λf مقيوسة (2)

٢) $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0$ ثابت اذن مقيوسة

٣) $\lambda < 0$

$(\lambda f)^{-1}([a, \infty[) = \{x : \lambda f(x) \geq a\}$ (4)

$= \{x : f(x) \leq \frac{a}{\lambda}\}$

$= f^{-1}(]-\infty, \frac{a}{\lambda}])$

مجموعة قيوسة لان f مقيوسة

اذن λf مقيوسة

السؤال الثالث F_1, F_2 مهملتين $\Leftrightarrow$

$\exists G_1, G_2 \in A, \quad F_1 \subseteq G_1 \wedge \mu(G_1) = 0$ (5)

$F_2 \subseteq G_2 \qquad \mu(G_2) = 0$

$\Rightarrow F_1 \cup F_2 \subseteq G_1 \cup G_2$

اذن $G_1 \cup G_2 \in \Delta$

$0 \leq \mu(G_1 \cup G_2) \leq \mu(G_1) + \mu(G_2) = 0$

$\Rightarrow \mu(G_1 \cup G_2) = 0$

اذن وحيث انه

$G_1 \cup G_2 \in \Delta : F_1 \cup F_2 \subseteq G_1 \cup G_2 \wedge \mu(G_1 \cup G_2) = 0$

اذن $F_1 \cup F_2$ مهملة

و $\mu(G_1) = 0$, $\underline{F_1 / F_2} \subseteq F_1 \subseteq \underline{G_1}$

5 اذن F_1 / F_2 مجموعة مهملة