سلم تصحيح مقرر الإحصاء ٣

الفصل الأول ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

السؤال الأول:

$$F_{i:n}(x) = P(X_{i:n} \le x) = P\left(\begin{array}{c}\text{على الأقل } i \text{ من مقادير} \\ \text{العينة لا يتجاوز } x\end{array}\right) \quad (5)$$

$$= P\left[\left(\begin{array}{c}\text{فقط } i \text{ من مقادير} \\ \text{العينة لا يتجاوز } x\end{array}\right) \cup \dots \cup \left(\begin{array}{c}\text{جميع مقادير العينة} \\ \text{لا يتجاوز } x\end{array}\right)\right] \quad (5)$$

$$= P\left(\begin{array}{c}\text{فقط } i \text{ من مقادير} \\ \text{العينة لا يتجاوز } x\end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c}\text{فقط } (i+1) \text{ من مقادير} \\ \text{العينة لا يتجاوز } x\end{array}\right) + \dots + P\left(\begin{array}{c}\text{جميع مقادير} \\ \text{العينة لا يتجاوز } x\end{array}\right) \quad (5)$$

$$= C^n_i [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} + C^n_{i+1} [F(x)]^{i+1} [1-F(x)]^{n-i-1} + \dots C^n_n [F(x)]^n [1-F(x)]^0 \quad (5)$$

$$= \sum_{m=i}^{n} C^n_m [F(x)]^m [1-F(x)]^{n-m}$$

$$= \sum_{m=i} \frac{n!}{m!(n-m)!} [F(x)]^m [1-F(x)]^{n-m}$$

السؤال الثاني

أ) (12)

حيث: 3

$$f_1(\theta/\underline{x}) = c f_0(\theta) L(\underline{x}/\theta)$$

$$L(\underline{x}/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\right) = e^{-n\theta} \frac{\theta^{\sum^n x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)} \quad 3$$

نبدل فنجد:

$$f_1(\theta/\underline{x}) = C \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} \cdot e^{-n\theta} \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)}$$

$$= k\, \theta^{\sum_{i=1}^n x_i + b - 1} e^{-(a+n)\theta} \quad 2$$

حيث: 3

$$k = \left[\int_0^\infty \theta^{\sum_{i=1}^n x_i + b - 1} e^{-(a+n)\theta} d\theta\right]^{-1} = \frac{(a+n)^{\sum_{i=1}^n x_i + b}}{\Gamma(\sum_{i=1}^n x_i + b)}$$

نبدل فنجد الكثافة البعدية:

$$f_1(\theta/\underline{x}) = \frac{(a+n)^{\sum x_i + b}}{\Gamma(\sum x_i + b)} \theta^{\sum x_i + b - 1} e^{-(a+n)\theta} \quad 1$$

$$\hat{\theta}_{BE} = E(\theta/\underline{x}) = \int_0^\infty \theta f_1(\theta/\underline{x})\, d\theta = \frac{(a+n)^{\sum x_i+b}}{\Gamma(\sum x_i+b)} \int_0^\infty \theta^{\sum x_i+b} e^{-(a+n)}$$

(4)

$$= \frac{(a+b)^{\sum x_i+b}}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n} x_i+b)} \frac{\Gamma(\sum x_i+b+1)}{(a+n)^{\sum x_i+b+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i+b}{(a+n)}$$

إذن:

$$\boxed{\hat{\theta}_{BE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + b}{a+n}}$$

(3

$$\widehat{P(X=0)} = \widehat{e^{-\theta}} = E(e^{-\theta}/\underline{x})$$

(4)

$$= \int_0^\infty e^{-\theta} f_1(\theta/\underline{x})\, d\theta = \frac{(a+n)^{\sum x_i+b}}{\Gamma(\sum x_i+b)} \int_0^\infty \theta^{\sum x_i+b} e^{-(a+n+1)\theta} d\theta$$

$$= \frac{(a+n)^{\sum x_i+b}}{\Gamma(\sum x_i+b)} \cdot \frac{\Gamma(\sum x_i+b)}{(a+n+1)^{\sum x_i+b}}$$

$$= \left(\frac{a+n}{a+n+1}\right)^{\sum x_i+b}$$

إذن:

$$\boxed{\hat{\tau}(\theta)_{BE} = \left(\frac{a+b}{a+n+1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i + b}}$$

السؤال الثالث:

أ) بفرض أن Y_1 عمر الدارة $-[e_1]-[e_2]-$ فيكون:

$Y_1=\min(X_1,X_2)$ وبالتالي: (2)

$$F_{Y_1}(t)=P(Y_1\le t)=1-P(Y_1>t)=1-P[\min(X_1,X_2)>t]$$
$$=1-P(X_1>t,X_2>t)=1-P(X_1>t)\,P(X_2>t)$$
$$=1-e^{-0.003t}\cdot e^{-0.003t}=1-e^{-0.006t} \quad (4)$$

وإذا رمزنا لعمر الدارة $-[e_3]-[e_4]-$ بـ Y_2 نجد بأسلوب مشابه أن:

$$F_{Y_2}(t)=1-e^{-0.006t} \quad (1)$$

إذا رمزنا لعمر الدارة الكلية بـ Y يكون: $Y=\max(Y_1,Y_2)$ (2)

فيكون:

$$F_Y(t)=P[\max(Y_1,Y_2)\le t]=P(Y_1\le t,Y_2\le t)$$
$$=P(Y_1\le t)\,P(Y_2\le t)=F_{Y_1}(t)\,F_{Y_2}(t) \quad (4)$$
$$=(1-e^{-0.006t})^2=1-2e^{-0.006t}+e^{-0.012t}$$

العمر الوسطي:

$$E(Y)=\int_0^\infty \bar{F}_Y(t)=\int_0^\infty(2e^{-0.006t}-e^{-0.012t})\,dt \quad (4)$$
2
$$=\left[\frac{2}{-0.006}e^{-0.006t}\right]_0^\infty-\left[\frac{1}{-0.012}e^{-0.012}\right]_0^\infty=\frac{2}{0.006}-\frac{1}{0.012}$$
$$=\frac{3}{0.012}=\frac{1}{0.004}=250 \quad 2$$

ب) (3)

$$h(t)=\frac{f_Y(t)}{\bar{F}_Y(t)}=\frac{0.012e^{-0.006t}-0.012e^{-0.012t}}{2e^{-0.006t}-e^{-0.012t}}$$
2 1

السؤال الرابع:

1) (3) بما أن معدلات التعطل ثابتة فإن:

$X_1 \sim exp(0.00022)$, $X_2 \sim exp(0.00018)$

$X_3 \sim exp(0.0006)$

$X = \min(X_1, X_2, X_3)$

وبالتالي يكون:

$\bar{F}_X(t) = p(X > t) = P(X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t)$ (8)

$= e^{-0.00022t} \cdot e^{-0.00018t} \cdot e^{-0.0006t} = e^{-0.001t}$

أي أن عمر الدارة له التوزيع الأسي بالوسيط $\lambda = 0.001t$

وبالتالي يكون العمر الوسطي:

$$E(X) = \int_0^\infty \bar{F}_X(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-0.001t}\,dt = -\frac{1}{0.001} e^{-0.001t}\Big|_0^\infty$$ (3)

$$= \frac{1}{0.001} = 1000$$

2)

$$p(1000 < X \leq 2000) = F_X(2000) - F_X(1000)$$

$$= 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$$ (3)

(3) بما أن لهذه الوحدة التوزيع الأسي بالوسيط $\lambda = 0.001$

(3) فلها معدل تعطل ثابت أي أن

$$h(1000) = \frac{1}{\lambda} = 1000$$

الدرس:

1) $P(X_{1:8} \cdot X_{8:8} = 1) = P(X_{1:8} = 1, X_{8:8} = 1) = P(X_{1:8} = 1)$ 4

$= P(X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots X_8 = 1) = (0.4)^8$

2) $P(X_1 \cdot X_5 = 0) = 1 - P(X_1 \cdot X_5 = 1) = 1 - P(X_1 = 1, X_5 = 1)$

$= 1 - P(X_1 = 1)\, P(X_5 = 1) = 1 - (0.4)(0.4) = 1 - 0.16 = 0.84$ 4

3) $P(X_{8:8} - X_{1:8} = 0) = P(X_{8:8} = X_{1:8})$ 4

$= P(X_{1:8} = 0, X_{8:8} = 0) + P(X_{1:8} = 1, X_{8:8} = 1) = P(X_{8:8} = 0) + P(X_{1:8} = 1)$

$= P(X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_8 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_8 = 1)$

$= \prod_{i=1}^{8} P(X_i = 0) + \prod_{i=1}^{8} P(X_i = 1) = (0.6)^8 + (0.4)^8$

4) $P(X_5 - X_1 = -1) = P(X_5 = 0, X_1 = 1) = P(X_5 = 0)\, P(X_1 = 1)$ 4

$= (0.6)(0.4) = 0.24$

5) $P\left(\prod_{i=1}^{8} X_i = 0\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{8} X_i = 1\right)$ 4

$= 1 - P(X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_8 = 1)$

$= 1 - \prod_{i=1}^{8} P(X_i = 1) = 1 - (0.4)^8$

السؤال السادس :

لدينا :

$$H(t)=F(t)+\int_0^t H(t-x)\,dF(x)$$

بأخذ تحويل ستلجس لابلاس نجد :

3

$$H^*(s)=F^*(s)+H^*(s)F^*(s)$$

$$\Rightarrow H^*(s)-H^*(s)F^*(s)=F^*(s)$$

$$\Rightarrow H^*(s)\left(1-F^*(s)\right)=F^*(s)$$

$$\Rightarrow H^*(s)=\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)} \quad (1) \qquad 2$$

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \Leftrightarrow F^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dF(t)=\int_0^\infty e^{-st}\lambda e^{-\lambda t}\,dt$$

$$=\lambda\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\,dt=\lambda\left[-\frac{1}{s+\lambda}e^{-(s+\lambda)t}\right]_0^\infty$$

$$=\lambda\left[0+\frac{1}{s+\lambda}\right] \; : s+\lambda>0 \,;\, (\lambda>-s)$$

10

$$=\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

نبدل في العلاقة (1) فنجد :

$$H^*(s)=\frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}}=\frac{\lambda}{s} \Leftrightarrow H(t)=\lambda t \qquad 5$$

وذلك لأنه :

$$H(t)=\lambda t \Rightarrow H^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dH(t)$$

$$=\lambda\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\lambda\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\lambda\left(0+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s}\;\frac{\lambda}{s}$$