طوبولوجيا عشوائية 1 _ الفصل الأول 2024 - 2025

الحل 1 _ لنعرف زمن التوقف التالي

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf\limits_{n\in\{1,\dots,k\}} \{\omega : X_n(\omega) \le -\lambda\} & ; \{X_n \le -\lambda\} \ne \phi \\ k & ; \{X_n \le -\lambda\} = \phi \end{cases}$$

وهو زمن توقف لأنه زمن الدخول الأول في $(-\infty, -\lambda]$. وإن $\{X_n\}$ هو تحت مارتنكال زمناً ولذلك حسب مبرهنة إن $E(X_\tau) \ge E(X_k)$ حيث

$$E(X_k) \le E(X_\tau) = \int_\Omega X_\tau \, d\mathbb{P} = \int_{\{\inf_n X_n \le -\lambda\}} X_\tau \, d\mathbb{P} + \int_{\{\inf_n X_n > -\lambda\}} X_\tau \, d\mathbb{P}$$

$$\le \int_{\{\inf_n X_n \le -\lambda\}} -\lambda \, d\mathbb{P} + \int_{\{\inf X_n > -\lambda\}} X_k \, d\mathbb{P} = -\lambda \mathbb{P}(\inf X_n \le -\lambda) + \int_{\{\inf X_n > -\lambda\}} X_k \, d\mathbb{P}$$

إن $X_k = X_k^+ - X_k^-$ ولذا $X_k \le X_k^+$ ويكون:

$$E(X_k) \le E(X_\tau) \le -\lambda \mathbb{P}(\inf X_n \le -\lambda) + \int_{\{\inf X_n > -\lambda\}} X_k^+ \, d\mathbb{P} \le$$

$$-\lambda \mathbb{P}(\inf X_n \le -\lambda) + E(X_k^+)$$

$$\Rightarrow E(X_k) - E(X_k^+) \le -\lambda \mathbb{P}(\inf X_n \le -\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} E(X_k^-) \ge \mathbb{P}(\inf X_n \le -\lambda)$$

الثاني 2 _ الطريقة الأولى هي برهان أن $(S_n, \mathcal{F}_n)$ مارتنكال ثم بما أن S_n^2 هو تابع محدب فإن $(S_n^2, \mathcal{F}_n)$ تحت مارتنكال

أما الطريقة الثانية وفق الشروط . في كلتا الطريقتين نتبع ما يلي

نأخذ $\mathcal{F}_n$ الترشيح الطبيعي أي

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$ ولذا فإن

$S_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$ $\mathcal{F}_n$ ـ مصفى

$$E|S_n| = E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} E|X_i| < +\infty$$ → نبرهن مارتنكال

لأن المتغيرات مستقلة وتوظيف كوشي شوارز

$$E|S_n^2| = E(S_n^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2\sum_{i<j} \underbrace{E(X_i)E(X_j)}_{\text{لاستقلال}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 0 < +\infty \longrightarrow$$ نبرهن تحت مارتنكال

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = E(S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) =$$ خطية وقياسية واستقلال

$$S_n + E(X_{n+1}) = S_n \ (a.s.) \rightarrow$$ مارتنكال

$$E(S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i\right)^2 \mid \mathcal{F}_n\right) =$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j \mid \mathcal{F}_n\right) =$$

$$+ X_{n+1}^2$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} X_i X_j + 2 X_{n+1} X_n \mid \mathcal{F}_n\right] =$$

قياسية واستقلال

$$E\left[S_n^2 + X_{n+1}^2 + 2 X_n X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] =$$

$$S_n^2 + E(X_{n+1}^2) + 2 X_n \underbrace{E(X_{n+1})}_{0} = S_n^2 + Var(X_{n+1}) \overset{a.s.}{\geq} S_n^2$$

الثالث 3- الأمولية

$$E|M_n| = E\left|\prod_{k=1}^{n} Y_k\right| \overset{\text{استقلال}}{=} \prod_{k=1}^{n} E(Y_k) < +\infty$$

4- نبرهن فقط شرط تحت المارتنكال: $\mathcal{F}_n$ الترشيح الطبيعي لـ M_n:

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = E\left[\prod_{k=1}^{n+1} Y_k \mid \mathcal{F}_n\right] = E[M_n Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= M_n E[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq M_n \ a.s$$

القياسية والاستقلال

5- نبرهن شرط فوق المارتنكال :

$$E[M_{n+1}|F_n] = E\Big[\prod_{k=1}^{n} Y_k \, Y_{n+1} \,|F_n\Big] = M_n \, E[Y_{n+1}|F_n] \leq M_n$$

$\boxed{\text{الرابع}}$ 6- برهان المحدودية بانتظام

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E|X_n| = \sup_n E[|X_n| 1_{\Omega}] =$$

$$\sup_n E\big[|X_n| 1_{\{|X_n|\geq c\}} + |X_n| 1_{\{|X_n|<c\}}\big]$$

$$\leq \sup_n E[|X_n| 1_{\{|X_n|\geq c\}}] + \sup_n E[|X_n| 1_{\{|X_n|<c\}}]$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{لأجل } c \text{ كبيرة} \\ \text{كفاية}}}{<} \varepsilon + \sup_n E[c \, 1_{\{|X_n|<c\}}] = \varepsilon + c \sup_n P(|X_n|<c)$$

$$\leq \varepsilon + c P(\Omega) = \varepsilon + c < +\infty$$

7- نبرهن $\forall \varepsilon>0$ ، $\forall A\in F_n$ يوجد $k_\varepsilon>0$: $P(A)<k_\varepsilon$ ونريد برهان

$$\sup_n E(|X_n| 1_A) < \varepsilon$$

$$E[|X_n| 1_A] = E\big[|X_n| 1_{A\cap\{|X_n|\geq c\}} + |X_n| 1_{A\cap\{|X_n|<c\}}\big]$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1_{A\cap B}\leq 1_B}}{\leq} E[|X_n| 1_{\{|X_n|\geq c\}}] + c E[1_{A\cap\{|X_n|<c\}}] \leq$$

$$E[|X_n| 1_{\{|X_n|\geq c\}}] + c P(A) \quad ; \forall n\in\mathbb{N}$$

بما أن $\{X_n\}_n$ مكاملة بانتظام فإنه لأجل c كبيرة كفاية نختار $E[|X_n| 1_{\{|X_n|\geq c\}}] < \frac{\varepsilon}{2}$ فإذا افترضنا وجود $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2c}$:

فعندئذ يكون: $P(A) < k_\varepsilon$

$$\forall n\in\mathbb{N} \cdot E[|X_n| 1_A] < \frac{\varepsilon}{2} + c\frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon \Rightarrow \sup_n E(\,) < \varepsilon$$

سوال ۸-

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(D_1, \dots, D_n)$$

پس D_n ، $\mathcal{F}_n$-معین

$$E|D_n| = E|X_n - X_{n-1}| \leq E|X_n| + E|X_{n-1}| < +\infty$$

$$E[D_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] - X_n = 0$$

پس $(D_n, \mathcal{F}_n)_n$ یک مارتینگل است

۹-

$$E(D_n) = E(X_n) - E(X_{n-1}) = 0$$

چون $\{X_n\}_n$ مارتینگل $\Rightarrow$ دنباله‌ی $\{E(X_n)\}_n$ ثابت است

۱۰-

$$\mathrm{cov}(D_n, D_{n-1}) = E(D_n D_{n-1}) - \underbrace{E(D_n)E(D_{n-1})}_{0}$$

$$= E[(X_n - X_{n-1})(X_{n-1} - X_{n-2})]$$

$$= E\{E[(X_n - X_{n-1})\underbrace{(X_{n-1} - X_{n-2})}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{-معین}} | \mathcal{F}_{n-1}]\}$$

$$= E\{(X_{n-1} - X_{n-2}) \underbrace{E[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]}_{\text{صفر} \; 0}\} = 0$$