1 سلم تصحيح تحليل (1)

الجمهورية العربية السورية	اختبار الفصل الأول	التاريخ:
وزارة التعليم العالي- جامعة دمشق	السنة الأولى: رياضيات	الوقت:
كلية العلوم- قسم الرياضيات	المادة: تحليل 1	الاسم:

السؤال الأول(30 درجة): أجب عما يلي:

1. إذا كانت $A=]2,6[$ فأثبت (جبرياً) أن $\sup(A)=6$ وبيّن ذلك بيانياً.
2. إذا كانت لدينا المتتالية: $\left\{a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3+a_n}:\quad a_1=1\right\}$ والمطلوب: أثبت أن حدودها موجبة (بالاستقراء الرياضي) ثم بين أنها محدودة ومتناقصة ومتقاربة من الصفر.
3. أثبت أن المتتالية التي لها الحد العام a_n متقاربة، حيث أن:

$$a_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^3+3}\cdots\cdots\frac{1}{2^n+n}:n\in N$$

السؤال الثاني(20 درجة): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلات وبين نوع التقارب للمتسلسلة المتناوبة منها واحسب مجموع المتسلسلة الأخيرة.

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n \qquad 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!} \qquad 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n^3}} \qquad 4)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n.\ln(n+1)}$$

السؤال الثالث(50 درجة): أجب عن الأسئلة الآتية:

1) ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ثم انشر التابع $f(x)=\ln(1+x)$ في جوار الصفر ثم استنتج مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2) أوجد مشتق الدالة $y=\arctan(x)$، ثم احسب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan(x)}{x}$.

3) ادرس استمرار التابع f المعرف على $]0,1[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x}{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor-x} & :x>0\\[2ex] 1 & :x=0\end{cases}$$

عند $x=0$ فقط.

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\arcsin(x)=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)-\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

5) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\left(1+2+\cdots+\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)$

انتهت الأسئلة — مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق — د. نايف طلي

سلم تصحيح تحليل 1

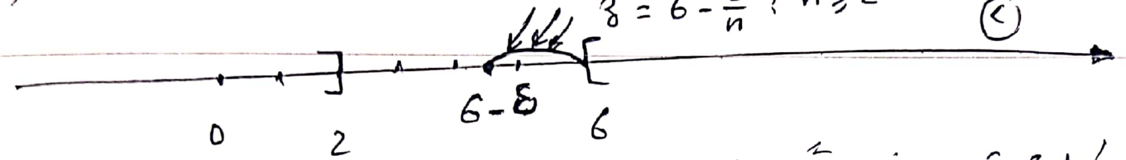
السؤال الأول: (1) $A =]2,6[\quad ; \quad \sup(A) = 6$

حتى تكون 6 هي $\sup(A)$ يجب تحقق الشرطين :

1) $\forall x \in]2,6[\Rightarrow x \leq 6$ (1)

2) $\forall \varepsilon > 0 , \exists z \in A : \quad z > 6 - \varepsilon$ (1)

$z = 6 - \frac{\varepsilon}{n} \; ; \; n \geq 2$ (1)



الشرط الأول محقق وضوحا . نحاول تحقيق الشرط الثاني

[1] $\left.\begin{array}{l} 6-2 > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \exists n \in \mathbb{N} \; : \; n(6-2) > \varepsilon$

حسب خاصية أرخميدس

ومنه $6 - \frac{\varepsilon}{n} > 2 \Leftarrow 6 - 2 > \frac{\varepsilon}{n}$

$\left. 6 > \underbrace{6 - \frac{\varepsilon}{n}}_{z} > 2 \right\}$ (1) $z \in A$

[2] $\varepsilon > \frac{\varepsilon}{n} \; ; \; n \geq 2$

$-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow 6 - \varepsilon < \underbrace{6 - \frac{\varepsilon}{n}}$

(1) $6 - \varepsilon < z$ تحقق الشرط الثاني وهـ.م .

السؤال الأول (c)

$$\left\{ a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n} \; ; \; a_1 = 1 \right\}$$

1) $a_1 = 1 > 0$ (1) حدودها موجبة لذن

2) $a_n > 0$ (1) نفرض أن

3) $a_{n+1} > 0$ لنبرهن أن

$a_n > 0 \; , \; 3 + a_n > 0$ (1) $\Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3+a_n} > 0$

وهو م.

$a_1 = 1$

$$0 < \frac{a_n}{3+a_n} < 1 \Rightarrow 0 < a_{n+1} \leq 1$$ (<)

أي أن المتتالية محدودة.
$\forall n \in N$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3+a_n} < 1$$

$a_{n+1} < a_n$ (<) أي أن

المتتالية متناقصة $\forall n \in N$

بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة فهي متقاربة.

أي أن

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3+a_n} \Rightarrow a = \frac{a}{3+a}$$ (1)

$$3a + a^2 = a \Rightarrow a^2 + 2a = 0$$

$a(a+2) = 0$ $\begin{cases} a = 0 & (1) \\ a = -2 & (1) \end{cases}$ مقبول كنهاية

مرفوض لأن $a_n > 0 \Rightarrow a = \lim a_n \geq 0$

السؤال الأول $a_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots \frac{1}{2^n+n} ; n \in N$

الطريقة الأولى: ملاحظة ① المتتالية متزايدة لأن

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}+n+1}$$

④

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}+n+1} > 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ متزايدة}$$

② محدودة من الأعلى لأن

$$a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$a_n < \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

④

$$a_n < \frac{1}{2}\left[\frac{1-(1/2)^n}{1-\frac{1}{2}}\right] \Rightarrow a_n < 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

متزايدة ومحدودة فهي متقاربة

②

الطريقة الثانية: إن المتتالية السابقة تمثل متسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ وهذه المتسلسلة متقاربة لأن

$$\frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n} \quad ④$$

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ② هندسية متقاربة حيث $q = \frac{1}{2}$; $|q| < 1$

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+n}$ ② متقاربة حسب معيار المقارنة.

وبالتالي المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة وهو م

②

السؤال الرابع:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

نلاحظ أن

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1 \neq 0$$

(1) (1)

السلسلة متباعدة حسب اختبار الحد النوني. (2)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\;n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!\,(n+1)!} \; (1)$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} \; (2)$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} (1) \frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(n+1)\cancel{n!}\,(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$\ell = 4 > 1$ (2) السلسلة متباعدة (1)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

السلسلة متناوبة (1)، نأخذ متسلسلة القيم المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \; (2)$$

ريمانية متقاربة لأن $P = \frac{3}{2} > 1$

والسلسلة الأصلية متقاربة (1) بالإطلاق

4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n\,\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right]$ (2)

تلسكوبية

$$= \frac{1}{\ln 2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2} \; (1)$$

(2)

نسلم تصحيح قسم التوابع من مقرر التحليل (١)
لطلاب السنة الأولى قسم الرياضيات
الدورة الأولى 2024 - 2025 .

السؤال الثالث :

(20) درجة ① ادرس تقارب $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ثم انشر التابع $f(x)=\ln(1+x)$ واستنتج مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

الحل: التحقق من تقارب المتسلسلة حسب معيار لايبنتز 5 درجات

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

ومتناقصة .

التحقق من إمكانية نشر التابع $f(x)=\ln(1+x)$. 5 درجات .

f استتقاقي على $[0,1]$ عدداً غير منته من المرات .

و معرفة أنَّ : $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 5 درجات

التعويض في شكل متسلسلة تايلور 3 درجات ثم استنتاج المجموع 2 درجة .

(10) درجة ② $y = \arctan(x)$. حساب مشتقها . 5 درجات .

$$\tan y = x \Rightarrow y'(1+\tan^2 y) = 1$$

$$y' = \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1} y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

حساب النهاية $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ حسب أوبيتال أو أي طريقة ثانية 5 درجات .

(10) درجة ③ حساب النهاية $\lim_{x \to 0^+} \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + x}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - x} = 1$. 5 درجات

وتوضيح سبب استمرار f عند $x=0$. 5 درجات .

(5) درجات ④ $\sin^{-1} x = \cos^{-1} a - \cos^{-1} b$

$$\Rightarrow \quad x = \sin\cos^{-1} a \cdot \cos\cos^{-1} b - \cos\cos^{-1} a \cdot \sin\cos^{-1} b$$

$$x = \sqrt{1-a^2} \cdot b - a \cdot \sqrt{1-b^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{8} - \sqrt{15}}{12}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2\left(1+2+\dots+\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$$

⑤ درجة (5)

$$= \lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1\right)}{2} \quad , \quad x \in \left]0,1\right[$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \le \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1 \le \frac{1}{x} + 1$$

بضرب المتراجحتين :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1\right) \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{x^2}{2}$:

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{2} < \frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1\right)}{2} x^2 \le \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة

$$\lim_{x \to 0^+} x^2\left(1+2+\dots+\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right) = \frac{1}{2}$$

انتهى ..

مدارس المقرر :