الاسم تصحيح مقرر
بنى جبرية (٣)
السنة الثالثة رياضيات

السؤال الأول (١٠+٢٠+١٥=٤٥ درجة)

١- لنعرف التطبيق $g: M/\ker f \to \mathrm{Im} f$ بالشكل الآتي $g(x+\ker f) = f(x)$
إن g تطبيق لأنه إذا كان $x+\ker f , y+\ker f \in M/\ker f$ بحيث أن $x+\ker f = y+\ker f$ ومنه نجد أن $(x-y)+\ker f = \ker f$ وبالتالي فإن $x-y\in \ker f$ ومنه $f(x-y)=0$ وبالتالي فإن $f(x)=f(y)$. وأن g تشاكل لأن

$$g[(x+\ker f)+(y+\ker f)] = g[(x+y)+\ker f]$$
$$= f(x+y) = f(x)+f(y) = g(x+\ker f)+g(y+\ker f)$$

وإذا كان $\lambda\in R$ فإن

$$g[\lambda(x+\ker f)] = g(\lambda x+\ker f) = f(\lambda x)$$
$$= \lambda f(x) = \lambda\, g(x+\ker f).$$

(٥ د)

ومنه فإن g تشاكل مودولات. g غامر لأنه إذا كان $m\in \mathrm{Im} f$ فإنه يوجد $z\in M$ بحيث أن $m=f(z)$ وإن $z+\ker f\in M/\ker f$ وبحيث

$$g(z+\ker f) = f(z) = m$$

g متباين لأنه إذا كان $g(x+\ker f)=g(y+\ker f)$ فإن $f(x)=f(y)$ ومنه فإن $f(x-y)=0$ وبالتالي فإن $x-y\in \ker f$ وبالتالي فإن $x+\ker f = y+\ker f$.

(٥ د)

٢- إن $f^{-1}(K)=\{x : x\in M , f(x)\in K\}$
بما أن $f(0)=0\in K$ نجد أن $0\in f^{-1}(K)$ ومنه فإن $f^{-1}(K)$ مجموعة جزئية غير خالية من M. ليكن $x,y\in f^{-1}(K)$ عندئذ فإن $x,y\in M$ وأن $f(x),f(y)\in K$ ومنه فإن $f(x-y)=f(x)-f(y)\in K$ وإذا كان $\lambda\in R$ فإن $f(\lambda x)=\lambda f(x)\in K$ ومنه نجد أن $x-y\in f^{-1}(K)$ وأن $\lambda x\in f^{-1}(K)$ وهذا يعني أن $f^{-1}(K)$ مودول جزئي في M.

(١٠ د)

ليكن $x\in f(f^{-1}(K))$ عندئذ يوجد $y\in f^{-1}(K)$ بحيث أن $x=f(y)\in K$ وبما أن $y\in M$ فإن $x=f(y)\in \mathrm{Im} f$ ومنه فإن $x\in K\cap \mathrm{Im} f$ وبالتالي $f(f^{-1}(K))\subseteq K\cap \mathrm{Im} f$. ليكن $m\in K\cap \mathrm{Im} f$ عندئذ $m\in K$ فإن $m\in \mathrm{Im} f$ ومنه يوجد $m_0\in M$ بحيث أن $m=f(m_0)$ ومنه فإن $f(m_0)=m\in K$ وبالتالي فإن $m_0\in f^{-1}(K)$ ومنه فإن $m=f(m_0)\in f(f^{-1}(K))$.

(١٠ د)

٣- ليكن $x\in B\cap(A+D)$ عندئذ فإن $x\in B$ وأن $x\in A+D$ ومنه $x=a+d$ حيث $a\in A$ و $d\in D$ وبما أن $a\in A\subseteq B$ فإن $d=x-a\in B$ ومنه نجد أن $d\in B\cap D$ ومنه نجد أن $x=a+d\in A+(B\cap D)$

$$B\cap(A+D)\subseteq A+(B\cap D)$$

(١٠ د)

ليكن $y\in A+(B\cap D)$ عندئذ فإن $y=a+b$ حيث $a\in A$ و $b\in B\cap D$ وبما أن $a\in A\subseteq B$ فإن $b\in D$ نجد أن ~~$y=a+$~~ $b\in A+D$ وأن $y\in B$ ومنه فإن $y=a+b\in B\cap(A+D)$.

السؤال الثاني (١٥ درجة)

لتكن $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\cdots$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول M عندئذ فإن $f(A_1)\subseteq f(A_2)\subseteq f(A_3)\subseteq\cdots$ سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية من المودول N وبما أن المودول N نيوثري فإنه يوجد دليل t بحيث أن $f(A_n)=f(A_t)$ وذلك لأجل كل $t\geq n$ ومنه فإن

$$f^{-1}(f(A_n)) = f^{-1}(f(A_t))$$

ومنه فإن

$$A_n+\ker f = A_t+\ker f \quad \forall\ t\geq n$$

CamScanner

من جهة أخرى، إن $g^{-1}(A_1) \subseteq g^{-1}(A_2) \subseteq g^{-1}(A_3) \subseteq \dots$ متتالية متزايدة من المودولات الجزئية في K ولما كان المودول الجزئي K نيوترياً فإنه يوجد عدد m بحيث أن $g^{-1}(A_m) = g^{-1}(A_n)$ وذلك أياً كان $m \geq n$ ومنه فإن $g(g^{-1}(A_m)) = g(g^{-1}(A_n))$ وبالتالي فإن

$A_m \cap Im\, g = A_n \cap Im\, g \quad \forall m \geq n$

٢/ ج

لنضع $k = \max\{m, t\}$ فيكون أن

$A_k + Ker\, f = A_n + Ker\, f$

$A_k \cap Im\, g = A_n \cap Im\, g \quad \forall k \geq n$

ولما كانت المتتالية تامة فإن $Ker\, f = Im\, g$ ومنه فإن

$A_k + Ker\, f = A_n + Ker\, f$ و $A_k \cap Ker\, f = A_n + Ker\, f$

ومنه تبين $A_k = A_n$ وبالتالي المتتالية تتقطع ومنه المودول M نيوتري.

السؤال الثالث: (١٠ درجات)

لنفرض أن المودول M آرتينياً وليكن k عدداً موجباً ثابتاً فإن

$Im(f^{k+1}) = f^{k+1}(M) = f^k(f(M)) \subseteq f^k(M) = Im\, f^k$

٢/ ج

ومنه تبين أن $Im\, f \supseteq Im\, f^2 \supseteq Im\, f^3 \supseteq \dots \supseteq Im\, f^t \supseteq \dots$ متتالية متناقصة من المودولات الجزئية في M، ولما كان المودول M آرتينياً فإنه يوجد عدد t بحيث أن $Im\, f^n = Im\, f^t$ وذلك أياً كان $n \geq t$

من جهة أخرى، لما كان كل من $Im\, f^n$ و $Ker\, f^n$ مودول جزئي في M فإن

$Im\, f^n + Ker\, f^n \subseteq M$

ليكن $m \in M$، لما كان $Im\, f^n = Im\, f^{2n}$ فإنه يوجد $x \in M$ بحيث أن $f^n(m) = f^{2n}(x)$ ومنه فإن $f^n(m - f^n(x)) = 0$ وبالتالي يكون $m - f^n(x) \in Ker\, f^n$ ومنه فإن

$m \in Im\, f^n + Ker\, f^n$

$M \subseteq Ker\, f^n + Im\, f^n \Rightarrow M = Im\, f^n + Ker\, f^n$

السؤال الرابع: (١٠ درجات)

(1) ⇐ (2). لنفرض أن المودول الجزئي K أعظمي في M. ليكن $\bar{D}$ مودولاً جزئياً في $\frac{M}{K}$، إذن $\bar{D} = D/K$ حيث D مودول جزئي في M وأن $K \subseteq D$. ولما كان المودول K أعظمياً في M فإنه إما $D = M$ أو أن $D = K$. إذا كان $K = D$ عندئذ فإن

$\bar{D} = \frac{D}{K} = \frac{K}{K} = K$

٢/ ص

إذا كان $D = M$ فإن $\bar{D} = \frac{D}{K} = \frac{M}{K}$ وهذا يبين أن المودول $\frac{M}{K}$ بسيط.

(2) ⇐ (1). لنفرض أن المودول $\frac{M}{K}$ بسيطاً وليكن N مودولاً جزئياً في M بحيث أن $K \subseteq N \subseteq M$. عندئذ فإن $\frac{N}{K}$ مودول جزئي في $\frac{M}{K}$ ولما كان المودول $\frac{M}{K}$ بسيط نجد إما $\frac{N}{K} = \frac{M}{K}$ أو أن $\frac{N}{K} = \frac{K}{K}$. إذا كان $\frac{N}{K} = \frac{M}{K}$ عندئذ أياً كان $m \in M$ فإن $m + K \in \frac{M}{K} = \frac{N}{K}$ ومنه يوجد $x \in N$ بحيث $m + K = x + K$ وبالتالي فإن $m - x \in K$ وبالتالي يوجد $k \in K$ بحيث أن $m - x = k$ ومنه نجد أن

$x + k \in N + K = N$

٢/ ص

ومنه فإن $N = M$. إذا كان $\frac{N}{K} = \frac{K}{K}$ نجد أن $N = K$ ومنه فإن المودول الجزئي K أعظمي في M.

السؤال الخامس: (١٠ درجات)

$5^2 = 25 \bmod 10 = 5$

$6^2 = 36 \bmod 10 = 6 \qquad 1 - 5 = 1 + (10 - 5) = 6$

$Z_{10} = 5Z_{10} \oplus (1-5)Z_{10}$

$= 5Z_{10} \oplus 6Z_{10}$

CS CamScanner