سلم تصحيح امتحان مادة تحليل تابعي (٢) الفصل الأول
في ٣ / ٣ / ٢٠٢٠ م ١١:٣٠ - ١٢:٣٠

السؤال الأول (٥ درجة) عرف الكلمات التالية:

فضاء الجداء الداخلي:
هو فضاء متجهي X معرف عليه جداء داخلي $\langle \cdot , \cdot \rangle$ يحقق الشروط التالية

1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in X$

2) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in X$

3) $\langle x, x\rangle \geq 0$

4) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

5) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha \in K (= \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$

المسافة بين نقطة ومجموعة: اذا كانت $A \subseteq X$ حيث X فضاء منظم و $x \in X$
فإن $d(x, A)$ المسافة بين x و A هي العدد
$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

المجموع المباشر:
اذا كان X فضاء متجهي و Y و Z فضاءان جزئيان في X
وكان كل عنصر من X تمثيل وحيد بالشكل
$x = y + z , y \in Y, z \in Z$
نقول أن X مجموع مباشر Y و Z .

مؤثر هلبرت المرافق:
ليكن $T : H_1 \to H_2$ مؤثراً خطياً لفضاء هلبرت H_1 في فضاء هلبرت H_2
عندئذ يكون $T^* : H_2 \to H_1$ مؤثر هلبرت المرافق بحيث
$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

تابع التقلص:
نفرض $T : X \longrightarrow X$ تابع ما نقول أن T تقلصي على X اذا وجد
$0 < \alpha < 1$ بحيث $\forall x, y \in X : d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$

السؤال الثاني (٥ درجة)

اثبت صحة مبرهنة المجموع المباشر التالية :

ليكن Y فضاء جزئي مغلق في فضاء هلبرت H عندئذ يكون $H = Y \oplus Z$ ، $Z = Y^{\perp}$

الإثبات :

ليأخذ $x \in H$ اذن بحسب تمهيدية سابقة لدينا في Y عنصر y وحيد

بحيث أن $z = x - y$ عمودي على Y أي $z \in Y^{\perp}$ اذن

$$x = y + z \,,\; y \in Y \,,\; z \in Z = Y^{\perp}$$

ولبرهان وحدانية تمثيل x الذي وجدناه اعلاه نفرض أن

$$y + z = x = y_1 + z_1 \quad z_1 \in Z \,,\; y_1 \in Y$$

ومنه $Y \ni y - y_1 = z_1 - z \in Y^{\perp}$

اذن $y - y_1 \in Y^{\perp}$ اذن $y - y_1$ يعامد نفسه ومنه

$$\langle y - y_1 , y - y_1 \rangle = 0 \Rightarrow \| y - y_1 \|^2 = 0 \Rightarrow y - y_1 = 0 \Rightarrow y = y_1$$

ومنه $z = z_1$

اذن التمثيل وحيد والمجموع مباشر .

السؤال الثالث (٥ درجة)

لدينا H_1 و H_2 فضاءين لهلبرت و $T, S : H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثران خطيان

محدودان . اثبت صحة الخواص التالية لمؤثر هلبرت المرافق

$$\langle T^* y , x \rangle = \langle y , Tx \rangle \quad \forall x \in H_1 \; \forall y \in H_2$$

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha} \, T^* \,,\quad (S + T)^* = S^* + T^*$$

البرهان : بما أن T^* مؤثر هلبرت المرافق لـ T فإن

$$\langle x , T^* y \rangle = \langle Tx , y \rangle \Rightarrow \overline{\langle x , T^* y \rangle} = \overline{\langle Tx , y \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle T^* y , x \rangle = \langle y , Tx \rangle$$

لبرهان الخاصة الثانية نأخذ $y \in H_2$ ، $x \in H_1$ بتطبيق الخاصة السابقة

$$\langle (\alpha T)^* y , x \rangle = \langle y , (\alpha T) x \rangle = \langle y , \alpha (Tx) \rangle = \bar{\alpha} \langle y , Tx \rangle$$

$$= \bar{\alpha} \langle T^* y , x \rangle = \langle (\bar{\alpha} T^*) y , x \rangle$$

$$\Rightarrow \langle (\alpha T)^* y , x \rangle = \langle (\bar{\alpha} T^*) y , x \rangle \quad \forall x \in H_1 , \forall y \in H_2$$

$$\Rightarrow (\alpha T)^* y = (\bar{\alpha} T^*) y \quad \forall y \in H_2$$

ومنه الخاصة الأخيرة $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

$$\langle (S+T)^* y, x\rangle = \langle y, (S+T)x\rangle$$
$$= \langle y, Sx + Tx\rangle$$
$$= \langle y, Sx\rangle + \langle y, Tx\rangle$$
$$= \langle S^* y, x\rangle + \langle T^* y, x\rangle$$
$$= \langle S^* y + T^* y, x\rangle$$
$$\langle (S+T)^* y, x\rangle = \langle (S^* + T^*) y, x\rangle \quad \forall y \in H_2, \forall x \in H_1$$
$$\Rightarrow (S+T)^* y = (S^* + T^*) y \quad \forall y \in H_2$$
$$\Rightarrow (S+T)^* = S^* + T^*$$

السؤال الرابع (25 درجة)

لتكن $X = [1, +\infty[$ ولتكن $T : (X, |\cdot|) \to (X, |\cdot|)$ المعرف بالعلاقة

$$Tx = \frac{x}{5} + \frac{1}{x}$$

برهن صحة المتراجحة التالية

$$|Tx - Ty| \le \frac{4}{5} |x - y| \quad \forall x, y \in X$$

ماذا تستنتج؟ وما هي النقطة الثابتة إن وجدت للتطبيق T؟

الحل: لدينا من أجل x و $y \in X$

$$Tx - Ty = \frac{x}{5} + \frac{1}{x} - \frac{y}{5} - \frac{1}{y} = \frac{x-y}{5} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$
$$= \frac{x-y}{5} + \frac{y-x}{xy}$$
$$Tx - Ty = (x-y)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{xy}\right) \Rightarrow |Tx - Ty| = \left|\frac{1}{5} - \frac{1}{xy}\right| |x-y|$$

لدينا حالتان: $5 \le xy$ ومنه $\frac{1}{xy} \le \frac{1}{5} \Rightarrow 0 \le \frac{1}{5} - \frac{1}{xy}$

ومنه فالمساواة الأخيرة تصبح

$$|Tx - Ty| = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{xy}\right)|x-y| \le \frac{1}{5}|x-y| \le \frac{4}{5}|x-y|$$
$$\Rightarrow |Tx - Ty| \le \frac{4}{5}|x-y|$$

أما إذا كان $xy < 5$ فإن $\frac{1}{5} < \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{xy} < 0$ ومنه تصبح المساواة الأخيرة

$$|Tx - Ty| = \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{5}\right)|x-y|$$

لكن لدينا $x \ge 1$ و $y \ge 1$ ← $1 \le xy$ ← $\frac{1}{xy} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{5} \le 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

ومنه $|Tx - Ty| \le \frac{4}{5}|x - y|$

فالمتراجحة صحيحة دوماً.

نستنتج من ذلك أن التابع T تقلصي على X وبالتالي
حسب نظرية النقطة الثابتة هنالك عنصر $x \in X$
حيث $Tx = x$ ومنه

$$\frac{x}{5} + \frac{1}{x} = x \Rightarrow \frac{x^2}{5} + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 + 5 = 5x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = +\frac{\sqrt{5}}{2}$$

نهاية سلم التصحيح

أ. أحمد هابيل مدرس المادة

٣/٣ ٢٠٢٥

جامعة دمشق

كلية العلوم

السنة الرابعة

المدة: ساعتان

امتحان الفصل الاول– رياضيات(تحليل) – تحليل تابعي٢ – ٣/ ٢٠٢٥/٣، ١١،٣٠ – ١٣،٣٠

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

عرّف الكلمات التالية:

فضاء الجداء الداخلي – المسافة بين نقطة ومجموعة – المجموع المباشر– مؤثر هلبرت المرافق – تابع التقليص .

السؤال الثاني: (٢٥ درجة) أثبت صحة مبرهنة المجموع المباشر التالية:

ليكن Y فضاء جزئي مغلق في فضاء هلبرت H عندئذ يكون: $H = Y \oplus Z,\ Z = Y^T$

السؤال الثالث: (٢٥ درجة)

لدينا H_1, H_2 فضاءان لهلبرت و $S, T: H_1 \longrightarrow H_2$ مؤثران خطيان محدودان. أثبت صحة الخواص التالية لمؤثر هلبرت المرافق:

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle\ (\forall x \in H_1, \forall y \in H_2)$$

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$$

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

السؤال الرابع: (٢٥ درجة)

ليكن $X = [1, +\infty[$ وليكن التابع $T: (X, |.|) \longrightarrow (X, |.|)$ المعرّف بالعلاقة

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{1}{x}$$

برهن صحة المتراجحة التالية:

$$|T(x) - T(y)| \leq \frac{4}{5}|x - y|, \forall x, y \in X$$

ماذا تستنتج؟ وماهي النقطة الثابتة، ان وجدت، للتابع T ؟ .

نهاية الأسئلة