سلم تصحيح امتحان مادة توبولوجيا 1
الفصل الأول ٣/٣ ، ٥:٠٠ - ٩ - ١١

السؤال الأول ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة، وخطأ أمام العبارة الخاطئة (30 درجة)

1) في أي فضاء متري (X,d) لدينا $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$ (صح)
2) متممة المجموعة المغلقة في فضاء متري مجموعة مفتوحة (صح)
3) A مجموعة محدودة $\Leftrightarrow \forall a \in X, \exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq N(a,r)$ (خطأ)
4) اتحاد مجموعتين مغلقتين في فضاء متري مجموعة مغلقة (صح)
5) A مجموعة متراصة $\Leftrightarrow$ من كل تغطية مفتوحة للمجموعة A يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية (صح)
6) في أي فضاء متري تقاطع مجموعة مغلقة تساويها (صح)
7) تقاطع مجموعة هي اتحاد كل المجموعات المغلقة التي تحوي هذه المجموعة (خطأ)
8) A مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow \forall a \in A : \exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq N(a,r)$ (خطأ)
9) A مجموعة مغلقة $\Leftrightarrow$ متممة A مجموعة مفتوحة (صح)
10) تقاطع مجموعة تساوي مجموعة النقاط الداخلية لهذه المجموعة (خطأ)

السؤال الثاني (20 درجة)

عرّف المصطلحات التالية: تقاطع مجموعة - النقطة الحدية - المجموعة المفتوحة - المجموعة المترابطة - المجموعة الكثيفة.

تقاطع مجموعة: هي تقاطع المجموعات المغلقة التي تحوي هذه المجموعة.

النقطة الحدية: نقول أن x نقطة حدية للمجموعة A إذا كان $X \supseteq A$:
$$\forall r > 0 : N(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

المجموعة المفتوحة: نقول أن A مجموعة مفتوحة إذا تحقق الشرط
$$\forall x \in A \ \exists r > 0 : N(x,r) \subseteq A$$

المجموعة المترابطة: نقول عن A أنها مترابطة إذا لم يكن بالإمكان إيجاد مجموعتين مفتوحتين U و V بحيث
$$A \subseteq U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset$$
$$A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$$

المجموعة الكثيفة: تكون $A \subseteq X$ كثيفة إذا كان $\overline{A} = X$.

السؤال الثالث (25 درجة)

برهن صحة النتيجة التالية : ليكن $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ تابع في الفضاء المتري (X,d) في الفضاء المتري (Y,ρ) برهن صحة التكافؤ التالي

f مستمر على X $\Leftrightarrow$ الصورة العكسية لمجموعة مغلقة في Y مغلقة في X

البرهان :

$\Rightarrow$ لتكن F مغلقة في $Y \Leftarrow$ F^c مفتوحة في Y وبما أن f مستمر على X اذن حسب مبرهنة سابقة $f^{-1}(F^c)$ مفتوحة في X

وبالتالي $\left(f^{-1}(F^c)\right)^c$ مغلقة في X لكن نعلم أن

$$\left(f^{-1}(F^c)\right)^c = f^{-1}(F)$$

اذن شرط النتيجة صحيح

$\Leftarrow$ نفرض صحة شرط ولنبرهن أن f مستمر على X

لذا نأخذ V مفتوحة في Y وبالتالي V^c مغلقة في Y

ومنه حسب الشرط $f^{-1}(V^c)$ مغلقة في X

لكن $\left(f^{-1}(V^c)\right)^c = f^{-1}(V)$ مفتوحة

اذن $f^{-1}(V)$ مفتوحة ومنه f مستمر حسب مبرهنة سابقة .

السؤال الرابع (20 درجة) $X=\mathbb{R}$ برهن أن التابع $d:X\times X\to\mathbb{R}$ المعرف بالعلاقة $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$ متقاربة على X .

الحل : نعلم أن $\ln a \geq 0$ اذا كان $a \geq 1$ ومن الواضح أن $1+|x-y| \geq 1$

اذن $0 \leq d(x,y)=\ln(1+|x-y|)$

كذلك $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \ln(1+|x-y|)=0 \Leftrightarrow 1+|x-y|=1 \Leftrightarrow |x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$

كذلك $d(x,y)=\ln(1+|x-y|)=\ln(1+|-(y-x)|)$

$$=\ln(1+|y-x|)=d(y,x)$$

من أجل المثلث نأخذ $x,y,z \in X$

$$d(x,z)=\ln(1+|x-z|)$$

نعلم أن التابع $\ln$ متزايد ولدينا

$$|x-z|=|(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| \leq |x-y|+|y-z|+|x-y||y-z|$$

وبإضافة 1 للطرفين المتراجحة نجد:

$$1+|x-z| \le 1+|x-y|+|y-z|+|x-y||y-z| = (1+|x-y|)(1+|y-z|)$$

وبما أن $\ln$ متزايد إذن

$$\ln(1+|x-z|) \le \ln(1+|x-y|)(1+|y-z|) = \ln(1+|x-y|)+\ln(1+|y-z|)$$

$$\Rightarrow \quad d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$$

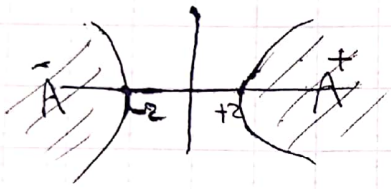
إذن d مسافة على X.

السؤال الخامس (5 درجات) برهن أن المجموعة

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2 \ge 4\}$$

غير مترابطة في الفضاء الحقيقي المألوف في $\mathbb{R}^2$.

الحل: لاحظ أن



$$A = A^+ \cup A^-$$

حيث $A^- = \{(x,y)\in A : x \le -2\}$

$A^+ = \{(x,y)\in A : x \ge +2\}$

A^+ يمين الخط الأيمن و A^- يسار الخط الأيسر

فنجد

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\} = U$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0\} = V$$

واضح أن U و V مفتوحتان في $\mathbb{R}^2$ كما أن

$$A \subseteq U \cup V, \quad \bar{A}\cap U\cap V = \emptyset \quad A\cap U \ne \emptyset \ne A\cap V$$

لذلك A ليست مترابطة.

نهاية سلم التصحيح

أ. أحمد هابيل

٣/٣ ص ٩-١١

جامعة دمشق
كلية العلوم

السنة الثانية
المدة: ساعتان

امتحان الفصل الاول – رياضيات – تبولوجيا١ – ٣ / ١٢ /٢٠٢٥، ٩-١١

السؤال الأول ضع كلمة صح أمام العبارة الصحيحة وخطأ أمام العبارة الخاطئة (30 درجة):

1- في أي فضاء متري (X,d) لدينا $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$.
2- متممة المجموعة المغلقة في فضاء متري مجموعة مفتوحة.
3- A مجموعة محدودة $\Leftrightarrow \forall a \in X, \exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq N(a,r)$
4- اتحاد مجموعتين مغلقتين في فضاء متري مجموعة مغلقة.
5- A مجموعة متراصة $\Leftrightarrow$ من كل تغطية مفتوحة للمجموعة A يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية.
6- في أي فضاء متري لصاقة مجموعة مغلقة تساويها.
7- لصاقة مجموعة هي اتحاد كل المجموعات المغلقة التي تحوي هذه المجموعة.
8- A مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow \forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq N(a,r)$
9- A مجموعة مغلقة $\Leftrightarrow$ متممة A مجموعة مفتوحة.
10- لصاقة مجموعة تساوي مجموعة النقاط الداخلية لهذه المجموعة.

السؤال الثاني (20 درجة): عرّف المصطلحات التالية: لصاقة مجموعة – النقطة الحدية – المجموعة المفتوحة – المجموعة المترابطة – المجموعة الكثيفة.

السؤال الثالث (25 درجة): برهن صحة النتيجة التالية: ليكن $f:(X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ تابع من الفضاء المتري (X,d) في الفضاء المتري (Y,ρ) ، برهن صحة التكافؤ التالي:

f مستمر على X $\Leftrightarrow$ الصورة العكسية لمجموعة مغلقة في Y مجموعة مغلقة في X

السؤال الرابع (20 درجة): ليكن $X = \mathbb{R}$ برهن ان التابع $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّف بالمساواة

$$d(x,y) = \ln(1 + |x - y|)$$

مسافة على X .

السؤال الخامس (5 درجات): برهن ان المجموعة $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 4\}$ غير مترابطة في الفضاء الحقيقي المألوف في $\mathbb{R}^2$.

نهاية الأسئلة

CamScanner