سام تهامي

جامعة دمشق – كلية العلوم امتحان تحليل عقدي(2) + تحليل 7 الفصل الأول 2024-2025

قســـــم الرياضـــيات السنة الثالثة (رياضيات) المدة : ساعتان

السؤال الأول: (20 درجة)

عرف التابع الأسي العقدي e^z، وعين الجزأين الحقيقي والتخيلي له وأثبت أنه تحليلي على C وعين مشتقه.

السؤال الثاني: (12 درجة)

حل المعادلة $\tan z = 2i$، ثم عين مجموعة تعريف التابع $f(z)=\dfrac{1}{(\tan z-2i)}$.

السؤال الثالث: (12 درجة)

احسب $\int_C \sin z dz$ حيث C هو قوس القطع المكافئ $y=x^2$ الذي بدايته المبدأ ونهايته $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{9}i$.

السؤال الرابع : (18 درجة)

احسب التكاملين $\int_{oA\oplus AB} \operatorname{Re} z dz$ ، $\int_{oB} \operatorname{Re} z dz$ حيث o مبدأ الإحداثيات و A النقطة الممثلة للعدد العقدي $1+i$ و B النقطة الممثلة للعدد العقدي $2+i$. استفد مما سبق في بيان فيما كان تكامل التابع $f(z)=\operatorname{Re} z$ مستقلا عن الطريق المسلوك وفيما كان للتابع $f(z)=\operatorname{Re} z$ تابع أصلي على C أم لا. علل إجاباتك.

السؤال الخامس : (10 درجة)

ناقش ، مع التعليل، صحة الدعوى التالية :

"استمرارية تابع عقدي f على منطقة G كافٍ لوجود تابع أصلي F لذلك التابع على G"

السؤال السادس : (16 درجة)

احسب التكامل $\int_{\Gamma_j} \dfrac{\sin z}{z^2(z-i)} dz$ حيث $j=1,2,3,4$، و

1. $\Gamma_1 = c^+(0,\frac{1}{2})$ ، 2. $\Gamma_2 = c^+(i,\frac{1}{4})$ ، 3. $\Gamma_3 = c^+(-3i,2)$ ، 4. $\Gamma_4 = c^+(0,2)$

السؤال السابع : (12 درجة)

هل يوجد للتابع $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ تابع أصلي على الشرط الأفقي ($R=\{z\in C: -1<\operatorname{Im} z<2\}$)؟

الفصل الأول ٢٠٢٤-٢٠٢٥

(١٠)

سلم تصحيح امتحان تحليل عقدي (٢)
لطلاب السنة الثالثة رياضيات

إجابة السؤال الأول: (عشرون درجة)

تعريف التابع e^{z}:

* إن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق على كامل $\mathbb{C}$ فهي تمثل تابعاً عقدياً معرفاً على $\mathbb{C}$ نسميه التابع العقدي الأسي ونرمز له بـ e^{z}، أي:

$$e^{z}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

٦ درجات

* تعيين الجزأين الحقيقي والتخيلي:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy}$$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \cdots$$

وبما أن السلسلة متقاربة بالإطلاق فإن

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \sin y$$

ومنه

$$e^{z} = e^{x}(\cos y + i \sin y) = e^{x}\cos y + i e^{x} \sin y$$

ومنه

$$v = e^{x} \sin y \quad , \quad u = e^{x} \cos y$$

٦ درجات

عقدي (٢) سلم (٥)

اثبات أن e^z تحليلي وتعيين مشتقه:

ط١: بما أن e^z ممثل بسلسلة قوى فهو تحليلي على قرص تقاربه وهو هنا $\mathbb{C}$. ثم إن مشتقه يعطى ب:

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

ط٢: إن $u_x = e^x \cos y$ ، $v_y = e^x \cos y$ ومنه $u_x = v_y \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

كما أن $u_y = -e^x \sin y$ ، $v_x = e^x \sin y$ ومنه $u_y = -v_x \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

أي أن u و v يحققان معادلتي كوشي ريمان على $\mathbb{R}^2$.

كما أنهما قابلان للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ حيث أنهما من الصف C^1 لأنهما يملكان مشتقات جزئية من المرتبة الأولى مستمرة على $\mathbb{R}^2$. النتيجة e^z تحليلي على $\mathbb{C}$. وإن:

$$(e^z)' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

إجابة السؤال الثاني: (اثنا عشر درجة)

* حل المعادلة $\tan z = 2i$:

$$\tan z = 2i \iff \frac{\sin z}{\cos z} = 2i \iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = 2i$$

$$\iff e^{iz} - e^{-iz} = -2e^{iz} - 2e^{-iz}$$

$$\iff 3e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -\frac{1}{3}$$

$$\iff e^{-2y}\,\mathrm{cis}(2x) = \frac{1}{3}\,\mathrm{cis}\,\pi$$

عفدي (د)   سلم (صح)

$$\tan z = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-2y} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \\ 2x = \pi + 2\pi k \,;\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k + i\,\frac{\ln 3}{2} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

هذه مجموعة حلول المعادلة.

ثماني درجات

---

* مجموعة التعريف

$$f(z) = \frac{1}{\tan z - 2i}$$

هي مجموعة تعريف البسط تقاطع مجموعة تعريف المقام نزع أصفار المقام أي أنها:

$$\left(\mathbb{C} \cap \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k + i\,\frac{\ln 3}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$= \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,,\, \frac{\pi}{2} + \pi k + i\,\frac{\ln 3}{2} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

أربع درجات

إجابة السؤال الثالث: (اثنا عشر درجة)

* بما أن $f(z) = \sin z$ تابع مستمر على المنطقة $\mathbb{C}$ (لأنه تحليلي على $\mathbb{C}$) و $F(z) = -\cos z$ تابع أصلي له على المنطقة $\mathbb{C}$ فإن تكامل $\sin z$ مستقل عن الطريق المسلوك وقيمة التكامل المطلوب:

ثماني درجات

$$\int_C \sin z \, dz = \left[-\cos z\right]_0^{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9} i}$$

$$= \cos 0 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9} i\right)$$

$$= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9} i\right)$$

أربع درجات

عفري (1)

ص ٤

إجابة السؤال الرابع: (ثماني عشر درجة)

$$\int_{OA \oplus AB} Re\, z\, dz = \int_{OA} Re\, z\, dz + \int_{AB} Re\, z\, dz$$

* إذن $\gamma_1(t) = t(1+i) : 0 \le t \le 1$ تمثيل لـ OA ومنه

$$\int_{OA} Re\, z\, dz = \int_0^1 Re(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\, dt = \int_0^1 t \cdot (1+i)\, dt$$

$$= (1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

* إذا

$$\gamma_2(t) = (1-t)A + tB$$

$$= (1-t)(1+i) + t(2+i)$$

$$= 1 - t + i - it + 2t + ti = (1+t) + i$$

$$\gamma_2(t) = (1+t) + i \;;\; 0 \le t \le 1$$

تمثيل لـ AB ومنه:

$$\int_{AB} Re\, z\, dz = \int_0^1 (1+t) \cdot (1)\, dt = \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

بالنتيجة:

$$\int_{OA \oplus AB} Re\, z\, dz = \frac{1+i}{2} + \frac{3}{2} = 2 + \frac{i}{2}$$

* إذا $\gamma_3(t) = (1-t)(0) + t(2+i) = 2t + it ; 0 \le t \le 1$

هو تمثيل لـ OB ومنه:

$$\int_{OB} Re\, z\, dz = \int_0^1 (2t)(2+i)\, dt = (2+i)\left[t^2\right]_0^1 = 2+i$$

تحضيري (٢)

حل ٥

بما أن للطريقة $OA \oplus AB$ ، OB البداية ذاتها والنهاية ذاتها

$\int_{OB} \operatorname{Re} z\, dz = 2 + i \neq 2 + \frac{i}{2} = \int_{OA\oplus AB} \operatorname{Re} z\, dz$ فإن التكامل لـ $f(z) = \operatorname{Re} z$

غير مستقل عن الطريقة المسلوكة .

* وبما أن تكامل $f(z) = \operatorname{Re} z$ غير مستقل عن الطريقة المسلوكة في $\mathbb{C}$

فليس لهذا التابع تابع أصلي على $\mathbb{C}$.

إجابة السؤال الخامس : عشر درجات

* الدعوى : " استمرارية تابع على منطقة كافية لوجود تابع أصلي له

على تلك المنطقة " غير صحيحة .

* التبرير :

فلو أخذنا التابع $f(z) = \operatorname{Re} z$ فنلاحظ أنه مستمر على المنطقة $\mathbb{C}$

وليس له تابع أصلي على $\mathbb{C}$ ، كما رأينا في إجابة السؤال الرابع .

ملاحظة : يمكن للطالب إعطاء أمثلة أخرى تحقق المطلوب ، على سبيل المثال

$f(z) = \frac{1}{z} \ldots$

إجابة السؤال السادس : ست عشر درجة

إن التابع $\frac{\sin z}{z^2(z-i)}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$. (درجتان)

إن التابع $f(z) = \frac{\sin z}{z-i}$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ فهو تحليلي على

محيط وداخل $D(0, \frac{1}{2})$ (أو $\Gamma = C^+(0,1)$) ، و $z = 0$ نقطة داخل القرص

تمرين (٢)

ص ٦

1- حسب صيغة كوشي:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z_0)}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) = 2\pi i(i) = -2\pi$$

حيث

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z-i} \Rightarrow f_1'(z) = \frac{(z-i)\cos z - \sin z}{(z-i)^2}$$

$$\Rightarrow f_1'(0) = \frac{-i}{(-i)^2} = \frac{1}{-i} = i$$

2. إن التابع $f_2(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ تحليلي على $\mathbb{C}^*$ فهو تحليلي على محيط وداخل $D(i, \frac{1}{4})$ و i تقع داخل هذا القرص ومنه:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i f_2(i)$$

$$= \frac{2\pi i \sin i}{-1} = -2\pi i \sin i$$

3. إن التابع المكامل تحليلي على محيط وداخل Γ_3 ، فالتكامل معدوم

4.

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-i}$$

بالضرب بـ z^2 وجعل z تسعى إلى الصفر نجد أن $B = -\frac{1}{i} = i$.

بالضرب بـ $z-i$ وجعل z تسعى إلى i ، نجد: $C = \frac{1}{i^2} = -1$

بالضرب طرفي المساواة بـ z وجعل z تسعى إلى ∞ ، نجد:

$$0 = A + 0 + C \Rightarrow A = -C = 1$$

عقدي (ح)

حل صح

النتيجة:

$$\frac{\sin z}{z^2(z-i)} = \frac{\sin z}{z} + i\frac{\sin z}{z^2} - \frac{\sin z}{z-i}$$

ومنه:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z}\,dz + i\int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z^2}\,dz - \int_{C^+(0,2)} \frac{\sin z}{z-i}\,dz$$

- وبتطبيق صيغ كوشي على هذه التكاملات نجد:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\sin z}{z^2(z-i)}\,dz = 2\pi i\sin 0 + i\,2\pi i(\cos 0) - 2\pi i\sin i$$

$$= 0 - 2\pi - 2\pi i\sin i$$

أربع درجات.

إجابة السؤال السابع (اثنا عشر درجة)

- بما أن $f(z)=\frac{1}{z^2+9}$ تحليلي على المنطقة R (الشرط ١)

و R منطقة بسيطة الترابط فإن لـ f تابع أصلي على هذا الشرط.

12 درجة