سلم تصحيح امتحان مادة نظرية الجبور
الفصل الأول - ٥/٣ ٢٠٠٠ ؛ ١١,٣٠ - ١٣,٣٠

السؤال الأول: (25 درجة)
عرّف الكلمات التالية: (5)
جبر لي: هو فضاء ـــ ـس A على حلقة واحدية تبادلية R مزود بقانون تشكيل داخلي يرمز له ب [,] ويحقق الشروط التالية:
1) $[x,x]=0 \quad \forall x\in A$ 2) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z] \quad \forall x,y,z\in A$
3) $[x,y+z]=[x,y]+[x,z] \quad \forall x,y,z\in A$ 4) $[\lambda x,y]=[x,\lambda y]=\lambda[x,y]$
$\forall x,y\in A \,,\ \forall \lambda\in R$ 5) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$
$\forall x,y,z\in A$

الإشتقاق على جبر لي: (5)
ليكن A جبر لي على حلقة واحدية تبادلية R
الإشتقاق على جبر لي A هو تداكل d على المقاس A يحقق المساواة
$d[x,y]=[dx,y]+[x,dy] \quad \forall x,y\in A$

الشكل ثنائي الخطية على جبر لي: (5)
ليكن A و A' جبري لي على حقل واحد K.
نقول أن التطبيق $T: A\times A'\longrightarrow K$ ثنائي الخطية على $A\times A'$ اذا كان T خطياً بالنسبة للمركبتين الأولى والثانية.

جبر BCK: (5)
جبر BCK هو مجموعة غير خالية X فيها عنصر مميز نرمز له ب 0 ومعرف عليها عملية ثنائية نرمز لها ب $*$ تحقق الشروط التالية
1) $x*x=0$, 2) $x*y=0=y*x \Rightarrow x=y$, 3) $(x*(x*y))*y=0 \ \forall x,y\in X$
4) $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$, 5) $0*x=0 \quad \forall x\in X$
$\forall x,y,z\in X$
جبر BCK المحدود: (5) هو جبر BCK فيه عنصر 1 في X بحيث
$\forall x\in X:\ x\le 1$

السؤال الثاني : (15 درجة)

برهن صحة النظرية التالية :

ليكن A جبر لي و $x \in A$. التطبيق $ad_x : A \to A$ المعرف بالعلاقة $ad_x(y) = [x, y]$ هو تطبيق اشتقاق على A .

البرهان :

بداية ad_x خطي لأن :

$$ad_x[\alpha y + \beta z] = [x, \alpha y + \beta z] = [x, \alpha y] + [x, \beta z]$$
$$= \alpha[x, y] + \beta[x, z] = \alpha\, ad_x(y) + \beta\, ad_x(z)$$
$$\forall x, y, z \in A, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$ad_x[y, z] = [x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]]$$
$$= [[x, y], z] + [y, -[z, x]]$$
$$= [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$
$$= [ad_x(y), z] + [y, ad_x(z)]$$

وهذا هو شرط تطبيق الإشتقاق . اذن ad_x تطبيق اشتقاق على A

السؤال الثالث : (20 درجة)

برهن صحة النظرية التالية : اذا كان $(A, *, 0)$ جبر BCK فإن $x * 0 = x \ (\forall x \in A)$

البرهان :

لبرهان المساواة $x * 0 = x$ فيجب إثبات أن $(x * 0) * x = 0$

$x * (x * 0) = 0$

المساواة الأولى $(x * 0) * x = (x * (x * x)) * x = 0$

وذلك من شروط تعريف جبر BCK

المساواة الثانية سنبرهنها ببرهان أن $(x * (x * 0)) * 0 = 0$ وهذه واضحة من شروط تعريف جبر BCK . كما أن $0 * (x * (x * 0)) = 0$ بسبب الشرط $0 * y = 0$ في تعريف جبر BCK .

اذن المساواتين الأولى والثانية صحيحتين ومنه $x * 0 = x \ (\forall x \in A)$

السؤال الرابع : (15 درجة)

هل جبر لي $\mathbb{R}^3$ المزود بالجداء الخارجي قابل للحل ؟

الحل :

جبر لي $\mathbb{R}^3$ غير قابل للحل لذا يجب برهان عدم وجود $m \in \mathbb{Z}^+$ بحيث

$D^m \mathbb{R}^3 = \{0\}$ كما يلي :

لاحظ أن $e_3 = [e_1, e_2] \in D^1\mathbb{R}^3 = [\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3]$ حيث $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ ، $e_3 = (0,0,1)$

أسفه الواحدة اذن $e_3 \in D^1\mathbb{R}^3$

كذلك $-e_2 = [e_1, e_3] \in D^1\mathbb{R}^3 \Leftarrow e_2 \in D^1\mathbb{R}^3$

$e_1 = [e_2, e_3] \in D^1\mathbb{R}^3$

اذن $e_1, e_2, e_3 \in D^1\mathbb{R}^3$ وبالتالي نجد

$e_3 = [e_1, e_2] \in D^2\mathbb{R}^3 = [D^1\mathbb{R}^3, D^1\mathbb{R}^3]$

كذلك e_2 و $e_1 \in D^2\mathbb{R}^3$ وبالتالي نجد بشكل مشابه أن :

$e_1, e_2, e_3 \in D^3\mathbb{R}^3, D^4\mathbb{R}^3, \ldots, D^m\mathbb{R}^3, \ldots$

لذا لمن المستحيل وجود $m \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $\{0\} = D^m\mathbb{R}^3$

اذن $\mathbb{R}^3$ غير قابل للحل .

السؤال الخامس : (15 درجة)

لنفرض أن $(A, *, 0)$ جبر BCK محدود وتبادلي . برهن صحة الخواص التالية :

(1) $a'' = a$ (2) $a' * b = b' * a$ (3) $a' * b' = b * a$

الحل : لدينا تعريفاً $a' = 1 * a$ لذا لاحظ أن

$a'' = 1 * a' = 1 * (1 * a) = a * (a * 1) = a * 0 = a \Rightarrow a'' = a$

$a' * b = (1 * a) * b = (1 * b) * a = b' * a$

$a' * b' = b * a$ وبرهان الخاصة

ضع في المساواة الثانية بدل b ، b' نجد

$a' * b' = (b')' * a = b'' * a = b * a$

السؤال السادس : (10 درجات)

برهن في جبر BCK $(N, *, 0)$ حيث $x * y = \max\{0, x - y\}$ صحة المساواة

$((n * m) * ((l+1) * m)) * ((n+1) * l) = 0, \forall l, m, n \in N$

الحل :

$$\begin{array}{l} l \leq l+1 \\ n \leq n+1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n*(l+1) \leq n*l \\ n*l \leq (n+1)*l \end{array}\right\} \Rightarrow n*(l+1) \leq (n+1)*l$$

لدينا من خواص جبر BCK

$$((n*m)*((l+1)*m)) \leq n*(l+1) \leq (n+1)*l$$

ومنه $((n*m)*((l+1)*m))*((n+1)*l)=0$

نهاية سلم التصحيح

أ. أحمد طابيل أستاذ المادة

٣/٥/٢٠٢٥، ١١,٣٠ - ١٣,٣٠

السنة الرابعة

جامعة دمشق

المدة: ساعتان

كلية العلوم

امتحان الفصل الاول – نظرية الجبور – رياضيات (الجبر والهندسة) - ٥ / ٣/٢٠٢٥، ١١،٣٠-١٣،٣٠

السؤال الأول: (٢٥ درجة)

عرّف الكلمات التالية:

جبر لي – الاشتقاق على جبر لي – الشكل ثنائي الخطية على جبر لي – جبرBCK – جبر BCK المحدود.

السؤال الثاني: (١٥ درجة)

برهن صحة النظرية التالية :

ليكن A جبر لي و $x \in A$. التطبيق $ad_x: A \longrightarrow A$ المعرّف بالعلاقة $ad_x(y) = [x, y]$ هو تطبيق اشتقاق على A .

السؤال الثالث: (٢٠ درجة)

برهن صحة النظرية التالية:

اذا كان $(A,*,0)$ جبرBCK فإن $x * 0 = x, \forall x \in A$.

السؤال الرابع : (١٥ درجة)

هل جبر لي $\mathbb{R}^3$ المزوّد بالجداء الخارجي قابل للحل؟

السؤال الخامس: (١٥ درجة)

لنفرض أن $(A,*,0)$ جبرBCK محدود وتبادلي، برهن صحة الخواص التالية:

1) $a'' = a$ ، 2) $a' * b = b' * a$ ، 3) $a' * b' = b * a$.

السؤال السادس: (١٠ درجات)

برهن في جبرBCK $(\mathbb{N},*,0)$ حيث $x * y = max\{0, x - y\}$ ، صحة المساواة :

$$\Big((n * m) * \big((l + 1) * m\big)\Big) * \big((n + 1) * l\big) = 0, \forall l, m, n \in \mathbb{N}$$

نهاية الأسئلة