سلم تصحيح تحليل (4) للسنة الثالثة رياضيات ف 1

السؤال الأول: I / 15 , II / 20

(1) بما أن f قابلة للاشتقاق في c يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إذا كان $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)\in \mathbb{R}^n$ ويحقق $\|h\|<\delta_1$ فيوجد نقطة $A=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ في $\mathbb{R}^n$ بحيث يكون

$$f(c+h)-f(c)=\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta\|h\|$$

ويعرف η دالة في h تحقق $\lim_{\|h\|\to 0} \eta(h)=0$ 5

نستنتج من هذا أنه إذا كان $\|h\|<\delta_1$

$$|f(c+h)-f(c)|=\left|\sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \eta \cancel{\|h\|}\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |A_i||h_i| + |\eta|\,\|h\|$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}|A_i| + |\eta|\right)\|h\|$$ حيث $|h_i|\le\|h\|$

وبما أن $\lim_{\|h\|\to 0}\eta=0$ فإنه مقابل العدد الموجب $\varepsilon=1$ يوجد عدد موجب δ_2 بحيث

إذا كان $0<\|h\|<\delta_2$ فإن $|\eta(h)|<1$

ومنه $|f(c+h)-f(c)|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|A_i|+1\right)\|h\|$

لنضع $c+h=x$ ، $\sum_{i=1}^{n}|A_i|+1=k>0$ ، $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$

وذلك من أجل $\|h\|<\delta$

$$|f(x)-f(c)|\le k\|x-c\|$$

---

(2) نفرض (أولاً) أن $\{x_m\}$ متتالية تتقارب من x في $\mathbb{R}^n$ بحسب التعريف

$\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; m\ge n_\varepsilon \quad \|x_m - x\|<\varepsilon$ 2

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{im}-x_i)^2}<\varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_{im}-x_i)^2<\varepsilon^2$$ 2

$$\Rightarrow (x_{1m}-x_1)^2+(x_{2m}-x_2)^2+\dots+(x_{nm}-x_n)^2<\varepsilon^2 \Rightarrow$$ 2

$$\Rightarrow (x_{im}-x_i)^2<\varepsilon^2 \quad (i=1,\dots,n)$$ 2

$$\Rightarrow |x_{im}-x_i|<\varepsilon \quad (i=1,\dots,n)$$ 2

وهذا يعني أن كل من المتتاليات الحقيقية $\{x_{im}\}$ تتقارب من x_i

(ثانياً) بالعكس لنفرض $\{x_{im}\}$ تتقارب من x_i حيث $i=1,\dots,n$

$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0, \exists n_{i\varepsilon} \in \mathbb{N}^*, m \geq n_{i\varepsilon} \; |x_{im} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1)$

$$\Rightarrow |x_{1m} - x_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad |x_{2m} - x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad \vdots \quad |x_{nm} - x_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow (x_{1m} - x_1)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}, \quad (x_{2m} - x_2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}, \quad \vdots \quad (x_{nm} - x_n)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2 < n\frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{im} - x_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow \|x_m - x\| < \varepsilon$$

$\underline{3}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon = \max(n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}, \dots n_{n\varepsilon}) \in \mathbb{N}^*, \; m \geq n_\varepsilon : \|x_m - x\| < \varepsilon$ $\underline{2}$

أي $\{x_m\}$ تتقارب من x في $\mathbb{R}^n$

السؤال (٣) — I 29, II 20, III 22

(II)

I) $\ln(1 - x - y + xy) = \ln(1-x)(1-y)$

يجب أن يكون

$(1-x)(1-y) > 0$

$\Rightarrow$ إما $(1-x) > 0 \;\; (1-y) > 0 \Rightarrow (1 > x), (1 > y) \Rightarrow x^2 + y^2 < 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2}$

محتوى في جوار $(0,0)$

أو $(1-x) < 0, (1-y) < 0 \Rightarrow 1 < x, \; 1 < y \Rightarrow x^2 + y^2 > 2$

$\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{2}$

مرفوض لأنه خارج الجوار $(0,0)$

$\boxed{2}$

$\because \ln(1-x)(1-y) = \ln(1-x) + \ln(1-y)$

$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$ $\underline{5}$

$f(0,0) = 0$

$f_x(x,y) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow f_x(0,0) = -1 = -0!$

$f_{xx}(x,y) = -\frac{(-1)(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow f_{xx}(0,0) = -1 = -1!$

$f_{xxx}(x,y) = -\frac{2(-1)(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{-2}{(1-x)^3} \Rightarrow f_{xxx}(0,0) = -2 = -2!$

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y) = \frac{-(2)(3)}{(1-x)^4} \Rightarrow \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = -3!$

$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \Rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0,0) = -(n-1)!$

$\boxed{8}$

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) = \frac{-(n-1)!}{(1-y)^n} , \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(0,0) = -(n-1)!$$

المشتقات الجزئية المختلطة = صفر

$$\ln(1-h)(1-k) - 0 = (-h-k) - \frac{1}{2!}(h^2+k^2) - \frac{2!}{3!}(h^3+k^3) - \dots - \frac{(n-1)!}{n!}(\dots$$

$$\ln(1-h)(1-k) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{h^n+k^n}{n}$$

$$\ln(1-x)(1-y) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n+y^n}{n}$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h f_x(a,b) + k f_y(a,b) + \eta\sqrt{h^2+k^2}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{h^2k}{h^6+2k^2} - 0 = 0 + 0 + \eta\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\eta = \frac{h^2 k}{(h^6+2k^2)(\sqrt{h^2+k^2})}$$

نضع $h = k$

$$\eta = \frac{h^3}{(h^6+2h^2)(2h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{h^3}{h^3(h^4+2)2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(h^4+2)2^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow$$

الدالة f غير قابلة للتفاضل في $(0,0)$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 3y(x^2+y^2) + 2y^2$$

$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 3yx^2 - 3y^3 + 2y^2$$

$$f_x(x,y) = 2(2x)(x^2+y^2) - 3y(2x) = 4x^3 + 4xy^2 - 6xy$$

$$f_y(x,y) = 2(2y)(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2) - 3y(2y) + 4y$$

$$= 4yx^2 + 4y^3 - 3x^2 - 9y^2 + 4y$$

$$f_x(x,y) = 4x(x^2+y^2) - 6xy \Rightarrow f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2) - 3(x^2+y^2) - 6y^2 + 4y \Rightarrow$$

$$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2) - 3x^2 - 9y^2 + 4y \Rightarrow f_y(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

حرجة

$$-f(x,\alpha x) = (x^2 + \alpha^2 x^2)^2 - 3\alpha x(x^2 + \alpha^2 x^2) + 2\alpha^2 x^2$$

$$= x^4 + \alpha^4 x^4 + 2\alpha^2 x^4 - 3\alpha x^3 - 3\alpha^3 x^3 + 2\alpha^2 x^2$$

$$f_x(x,\alpha x) = 4x^3 + 4\alpha^4 x^3 + 8\alpha^2 x^3 - 9\alpha x^2 - 9\alpha^3 x^2 + 2\alpha^2 x$$

$$f_{xx}(x,\alpha x) = 12x^2 + 12\alpha^4 x^2 + 24\alpha^2 x^2 - 18\alpha x - 18\alpha^3 x + 2\alpha^2$$ 6

$$f_{xx}(0,0) = 2\alpha^2 > 0 = f(0,0)$$

5 ناخذ $(\frac{\delta}{2}, 0) \in N((0,0), \delta)$, $f(\frac{\delta}{2}, 0) = \frac{\delta^4}{16} > 0 = f(0,0)$

5 $(0, \frac{\delta}{2}) \in N((0,0), \delta)$ $f(0, \frac{\delta}{2}) = (\frac{\delta^2}{4})^2 - 3\frac{\delta}{2}\frac{\delta^2}{4} + 2\frac{\delta^2}{4}$

$$f(0, \frac{\delta}{2}) = \frac{\delta^2}{16}(\delta^2 - 6\delta + 8) < 0 = f(0,0)$$

نأخذ δ

$$\delta^2 - 6\delta + 8 < 0$$

2 $(\delta-2)(\delta-4) < 0 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} \delta-2<0 \\ \delta-4>0 \end{matrix} \Rightarrow 4 < \delta < 2} & \text{مرفوض} \\ \begin{matrix} \delta-2>0 \\ \delta-4<0 \end{matrix} \quad 0<\delta<4 & \text{مقبول} \end{cases}$

أي أن $(0,0)$ غير مستقر