سلم تصحيح دورة (2025) فصل أول

(حلول عددية)

السؤال الأول (30 درجة)

1) تقدمية للزمن وتراجعية للمسافة

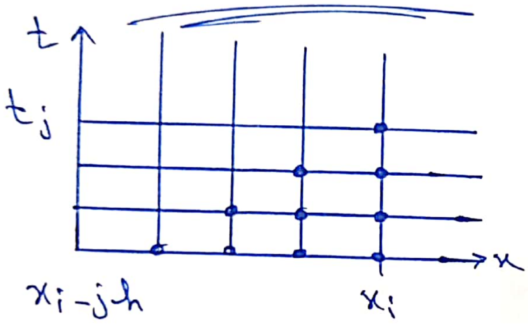
$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j}}{k}+o(k)=-\alpha\left(\frac{u_i^{j}-u_{i-1}^{j}}{h}\right)+o(h)$$

بإهمال خطأ الاقتطاع وبفرض أن: $\boxed{\lambda=\frac{\alpha k}{h}}$ فإن معادلة الفروق هي:

$$u_i^{j+1}=(1-\lambda)u_i^{j}+\lambda u_{i-1}^{j} \Rightarrow B=1-\lambda,\ C=\lambda$$

2) شرط CFL منطقة الحل الفعلي ⊆ منطقة الحل التقريبي

منطقة الحل التقريبي



$$x_i-jh\le x_i-\alpha t_j$$
$$-jh\le-\alpha t_j$$
$$-h\le-\alpha k$$
$$h\ge\alpha k\Rightarrow 1\ge\frac{\alpha k}{h}\Rightarrow \boxed{1\ge\lambda}$$

شرط CFL محقق.

3) دراسة الاستقرار باستخدام تحليل فورييه نفرض الخطأ من الشكل:

$$E_i^{j}=w^{j}e^{r x_i I}$$
$$I=\sqrt{-1}$$

بالتعويض في معادلة الفروق نحصل على

$$w=(1-\lambda)+\lambda e^{-rhI}$$

نعلم أن:

$$e^{-rhI}=\cos(rh)-I\sin(rh)$$
$$1-\cos(rh)=2\sin^2\left(\frac{rh}{2}\right)$$
$$\sin(rh)=2\sin^2\left(\frac{rh}{2}\right)\cos^2\left(\frac{rh}{2}\right)$$

$$w=1-2\lambda\sin^2\left(\frac{rh}{2}\right)-\lambda I\sin(rh)$$
$$|w|^2=1+4(\lambda)(\lambda-1)\sin^2\left(\frac{rh}{2}\right)$$

لتكون الطريقة مستقرة يجب أن يتحقق

$$|w|^2\le1\Rightarrow\lambda-1<0\Rightarrow\lambda<1$$
$$\Rightarrow\boxed{\alpha k<h}$$ شرط الاستقرار

السؤال الثاني (15 درجة)

نلاحظ أن الحد الأول والثاني

$$\lim \left[\frac{k^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right) - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)\right] \xrightarrow[h\to 0]{k\to 0} 0$$

أما بالنسبة للحدين الثالث والرابع

$$\boxed{k = \lambda h} \qquad\qquad \boxed{k = \lambda h^2}$$

$k = \lambda h$

* $\boxed{\theta \neq \frac{1}{2}}$ لا ينعدم الحد الثالث

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left[(2\theta-1)\frac{2}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] \xrightarrow{h\to 0} 0$$

الطريقة غير متماسكة

* $\boxed{\theta = \frac{1}{2}}$ ينعدم الحد الثالث

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left[\lambda^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] \neq 0$$

الطريقة غير متماسكة .

$k = \lambda h^2$

* $\boxed{\theta \neq \frac{1}{2}}$ لا ينعدم الثالث

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \left[(2\theta-1)\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right] \neq 0$$

الطريقة غير متماسكة

* $\boxed{\theta = \frac{1}{2}}$ ينعدم الثالث

$$\lim_{h\to 0} \left[\lambda h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\right] = 0$$

الطريقة متماسكة

السؤال الرابع (15 درجة)

$$L_x u = u$$

$$\overset{L_x^{-1}}{\Longrightarrow} \quad L^{-1}(u') = L^{-1}(u)$$

$$\Rightarrow \int_0^x u' \, dx = L^{-1}(u)$$

$$u(x) - u(0) = L^{-1}(u)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = u(0) + L^{-1}(u)}$$

حل المعادلة من الشكل

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u(0) = u_0 = A, \quad u_{n+1} = L^{-1}(u_n), \quad n \geq 1$$

$$u_1 = L^{-1}(u_0) = \int_0^x A \, dx = Ax$$

$$u_2 = L^{-1}(u_1) = \int_0^x Ax \, dx = A\frac{x^2}{2!}$$

$$u_3 = L^{-1}(u_2) = \int_0^x A\frac{x^2}{2!} \, dx = A\frac{x^3}{3!}$$

ومنه نجد أن:

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$= A + Ax + A\frac{x^2}{2!} + A\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= A\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\boxed{u(x) = Ae^x}$$

السؤال الثالث: (20 درجة)

طريقة غالركين

$P = x^2 \qquad q = x \qquad r = 0 \;,\; f = x^2$

$\varphi_i(x) = x^i(x-1)$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = x^2 - x \Rightarrow \varphi_1'(x) = 2x-1$

$\Rightarrow \varphi_2(x) = x^3 - x^2 \rightarrow \varphi_2'(x) = 3x^2 - 2x$

الحل من الشكل:

$u(x) = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$

بالشكل المصفوفي:

$AC = B$

عناصر المصفوفة A

$$a_{ij} = \int_0^1 [P\varphi_i'\varphi_j' + q\varphi_j\varphi_i]\,dx$$

$$a_{11} = \int_0^1 [x^2(2x-1)^2 + x(2x-1)(x^2-x)]\,dx = \boxed{0.11666}$$

$$a_{12} = \int_0^1 [x^2(2x-1)(3x^2-2x) + x(3x^2-2x)(x^2-x)]\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{12} = 0.1}$$

$$a_{21} = \int_0^1 [x^2(2x-1)(3x^2-2x) + x(2x-1)(x^3-x^2)]\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{21} = 0.0833}$$

$$a_{22} = \int_0^1 [x^2(3x^2-2x)^2 + x(3x^2-2x)(x^3-x^2)]\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{22} = 0.0809}$$

عناصر المصفوفة B

$$b_i = \int_0^1 f\varphi_i\,dx$$

$$b_1 = \int_0^1 x^2(x^2-x)\,dx \Rightarrow \boxed{b_1 = -0.05}$$

$$b_2 = \int_0^1 x^2(x^3-x^2)\,dx \Rightarrow \boxed{b_2 = -0.0333}$$

$AC = B$

$$\begin{pmatrix} 0.1166 & 0.1 \\ 0.0833 & 0.0809 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.033 \end{pmatrix}$$

بالحل المنزلي نجد أن:

$C_1 = -0.647 \qquad C_2 = 0.2549$

$$\Rightarrow \boxed{u(x) = -0.647\varphi_1 + 0.2549\varphi_2}$$

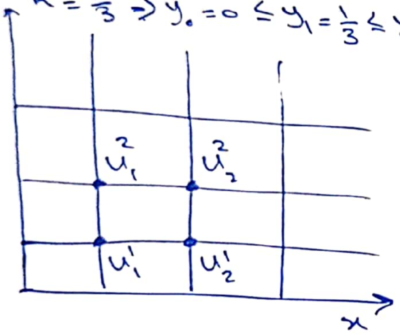
السؤال الخامس (20 درجة)

معادلة الفروق هي:

$$\boxed{-4u_i^j + u_{i+1}^j + u_{i-1}^j + u_i^{j+1} + u_i^{j-1} = 0}$$

$h = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = 0 \le x_1 = \frac{1}{3} \le x_2 = \frac{2}{3} \le x_3 = 1$

$k = \frac{1}{3} \Rightarrow y_0 = 0 \le y_1 = \frac{1}{3} \le y_2 = \frac{2}{3} \le y_3 = 1$



النقاط الداخلية هي:

$u_1^1, u_1^2, u_2^1, u_2^2$

$i=1, j=1$: $-4u_1^1 + u_2^1 + u_1^2 = 0$

$i=1, j=2$: $-4u_1^2 + u_2^2 + u_1^1 = \frac{4}{3}$

$i=2, j=1$: $-4u_2^1 + u_1^1 + u_2^2 = -\frac{4}{3}$

$i=2, j=2$: $-4u_2^2 + u_1^2 + u_2^1 = 0$

بالشكل المصفوفي:

$AU = B$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$