سلم تصحيح مقرر الإحصاء والاحتمالات

السنة الأولى - رياضيات

الفصل الأول 2024/2025

السؤال الأول:

أولاً:

1- أي من المقاييس التالية لا يعد مقياس للتشتت: D - لا شيء مما سبق

2- أي من المقاييس التالية يجب أن يأخذ أكثر من قيمة لأجل عينة واحدة: B - المنوال

3- يحسب مركز الفئة في البيانات المبوبة بجداول فئات بالعلاقة: B - $\frac{\text{الحد الأعلى} + \text{الحد الأدنى}}{2}$

4- المضلع التكراري لمجموعة من البيانات هو ... يصل بين منتصفات الأضلاع العليا للمدرج التكراري. C - فقط

5- لدينا مجموعة n من القياسات، متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري S ولدينا عدد k أكبر أو يساوي الواحد فإن نسبة القياسات التي تقع ضمن المجال $[\bar{x}-ks, \bar{x}+ks]$ هي على الأقل: C - $1-\frac{1}{k^2}$

ثانياً: إذا كانت $x_1 \dots x_n$ عينة من القياسات فإن:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+\bar{x}^2-2x_i\bar{x}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

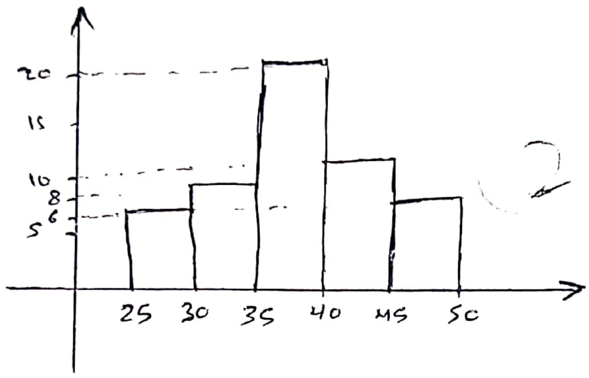
$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}^2-2\bar{x}.n\bar{x}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}^2-2n\bar{x}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right]$$

الفئات	التكرار n_i	مركز الفئة x_i	$n_i x_i$	التكرار الصاعد F_i	x_i^2	$n_i x_i^2$
$[25,30[$	6	27.5	165	6	756.25	4537.5
$[30,35[$	8	32.5	260	14	1056.25	8450
$[35,40[$	20	37.5	750	34	1406.25	28125
$[40,45[$	10	42.5	425	44	1806.25	18062.5
$[45,50]$	6	47.5	285	50	2256.25	13537.5
Σ	50		1885			72712.5

1) المدرج التكراري :



2) المتوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} n_i} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1885}{50} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{377}{10} = 37.7}$$

الوسيط :

$$Med = a_{med} + \frac{O_{med} - F_{med}}{f_{med}} \cdot h_{med}$$

$$O_{med} = \frac{n}{2} \Rightarrow O_{med} = \frac{50}{2} = 25$$

فئة الوسيط هي الفئة الثالثة : $[35,40[$

$$a_{med} = 35, \quad F_{med} = 14, \quad f_{med} = 20, \quad h_{med} = 5$$

$$\Rightarrow Med = 35 + \frac{25-14}{20} \times 5 \Rightarrow \boxed{Med = \frac{151}{4} \simeq 37.75}$$

الانحراف المعياري والتباين :

$$S^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[n \sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{r} n_i x_i \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{50(49)} \left[50(72712.5) - (1885)^2 \right] \Rightarrow \boxed{S^2 = \frac{1648}{49} = 33.6}$$

$$S = \sqrt{S^2} \Rightarrow \boxed{S = \sqrt{33.63} = 5.79 \simeq 5.80}$$

ثانيا :

لدينا : $n = 500$ مصباح

$\bar{X} = 800$

$S = 40$

① المجال من ساعات عمل المصابيح التي تقع ضمنه على الأكثر (80) مصباحا

حسب متباينة تشيبيشيف : $[\bar{x} - ks \;,\; \bar{x} + ks]$

يحوي على الأكثر $\frac{1}{k^2}$ % (نسبة $\frac{1}{k^2}$ من القياسات)

أي : $\frac{80}{500} = \frac{1}{k^2}$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{500}{80} \Rightarrow k^2 = 6.25 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{2} = 2.5$$

ومنه المجال المطلوب $[\bar{x} - ks, \bar{x} + ks] = [800 - (2.5)(40), 800 + (2.5)(40)]$

$= [700, 900]$

أي مجال ساعات عمل المصابيح ما بين 700 إلى 900 ساعة.

② نفرض العدد الأصغري ℓ

لدينا المجال

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - ks = 680 \\ \bar{x} + ks = 920 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

ومنه

$$\frac{\ell}{n} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{\ell}{500} \geq 1 - \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{\ell}{500} \geq \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \ell \geq \frac{500 \times 8}{9}$$

$$\Rightarrow \ell \geq 444.44$$

ومنه : $\boxed{\ell = 445}$ العدد الأصغري للمصابيح التي تعمل مدة بين [680,920]

$\boxed{3}$

حبيب

السؤال الثالث: اختيار ثلاث أسئلة من أربع أسئلة

لكل سؤال يختاره الطالب 10 درجات

① إثبات أن A', B' و A', B مستقلين علماً أن A, B مستقلين

حل: حسب قانون دومرغان

$$p(A' \cap B') = 1 - p(A \cup B)$$
$$= 1 - (p(A) + p(B) - p(A \cap B))$$
$$= 1 - (p(A) + p(B) - p(A)\, p(B))$$
$$= 1 - p(A) - p(B) + p(A)\, p(B)$$
$$= 1 - p(A) - p(B)(1 - p(A))$$
$$= (1 - p(A))(1 - p(B))$$
$$= p(A')\, p(B')$$

$\Rightarrow$ $p(A' \cap B') = p(A') . p(B')$ أي حسب التعريف

• A', B' مستقلين

لكل قسم 5 درجات

حل: * مراحل إثبات أن A', B مستقلين حسب قاعدة الاحتمال الشرطي لدينا

$$p_B(A') + p_B(A) = 1$$

• لدينا A, B مستقلين أي $p_B(A) = p(A)$ وبالتالي

$$p_B(A') + p(A) = 1 \Rightarrow p_B(A') = 1 - p(A) = p(A')$$

وبالتالي A', B مستقلين حسب تعريف الاستقلال

---

② حسب قاعدة الاحتمال المركب

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p(A_1)\, p(A_2 | A_1)\, p(A_3 | A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

الحل بهذه الطريقة يأخذ 10 درجات

ملاحظة: لعقام أستاذ المادة مساعدة الطالب عن طريق سرد نصف الحل في هذا السؤال.

ليكن A الحدث الدال على أن الرامي S يصيب الهدف
B الرامي Q يصيب الهدف
C الرامي R يصيب الهدف

وبالتالي $p(A)=\frac{3}{5}, p(B)=\frac{2}{3}, p(C)=\frac{1}{2}$

الاحتمال المطلوب هو $p(A'\cap B'\cap C')$ وبالتالي

$$p(A'\cap B'\cap C') = 1 - p(A\cup B\cup C) = 1 - \big(p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B) - p(A\cap C) - p(B\cap C) + p(A\cap B\cap C)\big)$$

وحسب الاستقلال يكون

$$p(A'\cap B'\cap C') = 1-\big(p(A)+p(B)+p(C)-p(A)\cdot p(B)-p(A)\cdot p(C) + p(A)\,p(B)\,p(C)\big)$$

الحل بهذه الطريقة يأخذ 10 درجات موزعة بين قانون + تطبيق

$$= 1-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{15-18-20}{30}+\frac{12}{30}+\frac{9}{30}-\frac{6}{30}+\frac{10}{30}=\frac{2}{30}$$

---

٤) H: الصورة
T: الكتابة

$A=\{HH, HT\} \Rightarrow A'=\{TT, TH\} \Rightarrow p(A')=\frac{1}{2}$

$B=\{HH, TH\} \Rightarrow B'=\{TT, HT\} \Rightarrow p(B')=\frac{1}{2}$

$C=\{HT, TH\} \Rightarrow C'=\{TT, HH\} \Rightarrow p(C')=\frac{1}{2}$

$A'\cap B'=\{TT\} \Rightarrow p(A'\cap B')= p(A')\cdot p(B')$ $\left(\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$A'\cap C'=\{TT\} \Rightarrow p(A'\cap C') = p(A')\cdot p(C')$ $\left(\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$A'\cap B'\cap C'=\{TT\} \Rightarrow p(A'\cap B'\cap C') \neq p(A')\cdot p(B')\,p(C')$

وبالتالي (A', B') مستقلين و (A', C') مستقلين و (B', C') مستقلين
ولكن الثلاثية (A', B', C') غير مستقلة

$(B'\cap C')=\{TT\} \Rightarrow p(B'\cap C') = p(B')\cdot p(C')$

10 درجات يتم توزيعها بين كتابة الاحداث وحساب احتمالاتها

السؤال الرابع: أولاً: إثبات خاصية الاحتمال الكلي

بما أن $H_1, \dots, H_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد وبالتالي فهي متنافية مثنى، وبالتالي الاحداث $(A \cap H_i);\ i=1,\dots,n$ أيضاً متنافية

$$A = A \cap \Omega$$
$$= A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n)$$
$$= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$$

$$p(A) = p(A \cap H_1) + p(A \cap H_2) + \dots + p(A \cap H_n)$$

حسب قانون الجداء

$$= p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2) + \dots + p(H_n)p(A/H_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i)$$

• اثبات قانون بايز

حسب تعريف الاحتمال الشرطي لدينا:

$$p(H_k/A) = \frac{p(H_k \cap A)}{p(A)}$$

وحسب قاعدة الجداء لدينا

$$p(H_k \cap A) = p(H_k)\, p(A/H_k)$$

وبالتالي حسب خاصية الاحتمال الكلي وبالتبديل نجد.

$$p(H_k/A) = \frac{p(H_k)p(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i)}$$

لكل اثبات 5 درجات

ثانياً: ① من الواضح أن $p(H_1)=0.2,\ p(H_2)=0.35,\ p(H_3)=0.45$، وبالتالي $p(H_1)+p(H_2)+p(H_3)=1$ حيث H_1, H_2, H_3 تشكل تجزئة للحدث Ω

② حسب قانون الاحتمال الكلي

$$p(D) = p(H_1)p(D/H_1) + p(H_2)p(D/H_2) + p(H_3)p(D/H_3)$$
$$= (0.2)(0.05) + (0.35)(0.02) + (0.45)(0.03)$$
$$= 0.0305$$

③ حسب قانون بايز

$$p(H_2/D) = \frac{p(H_2)\,p(D/H_2)}{p(D)} = 0.23$$

لكل طلب في ② و ③ ~~...~~ أربع درجات والطلب ① درجتين