جامعة دمشق	امتحان مقرر	الفصل الأول 2025/2024
كلية العلوم	الاحصاء الرياضي	التاريخ: 2025/02/18
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الثالثة رياضيات	المدة: ساعتين

س1 (20 درجة): إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي له التوزيع البواسوني بوسيط λ . أوجد بطريقة العزوم مقدرا للوسيط λ وهل هذا المقدر منصف أم لا.

س2 (20 درجة): إذا كانت أوزان أكياس الملح الذي تنتجه إحدى المؤسسات يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 10 كغ وانحراف معياري 0.2 كغ. أخذنا عينة حجمها 10 أكياس من إنتاج هذه المؤسسة فوجدنا أن انحرافها المعياري 0.2 كغ.
والمطلوب:

أ- اوجد احتمال أن يزيد متوسط العينة على 11 كغ.

ب- ما هو احتمال أن يكون الانحراف المعياري للعينة أكبر من 0.2 كغ.

س3 (30 درجة): لدى تخدير 50 شخص من المرضى الكبار في السن تبين أن 18 منهم حصلت لهم مضاعفات جراء تخديرهم
والمطلوب:

أ- أوجد 95% مجال ثقة لنسبة الذين يعانون من مضاعفات جراء التخدير؟

ب- عين الخطأ ألأعظمي المرتكب عندما نفترض أن $p = \hat{p}$ بثقة 95% ؟

ج- ما هو حجم العينة التي ينبغي دراستها لكي لا يتجاوز الخطأ في التقدير المقدار 0.04 وبثقة 99% ؟.

س4 (30 درجة): إذا كانت طول الرجل يتوزع وفق التوزيع الطبيعي. قمنا بدراسة عينة عشوائية مؤلفة من 10 رجال فكان متوسطها 170 سم وانحرافها المعياري 20 سم، والمطلوب:

أ- أوجد 99% مجال ثقة لمتوسط طول الرجل.

ب- أوجد 95% مجال ثقة لتباين أطوال الرجال.

انتهت الأسئلة

أرجو لكم التفوق والنجاح

د. علي قبوي

ملاحظة : الجداول في الصفحة الخلفية و يمكن استخدام الآلات الحاسبة العادية.

د. علي جبوريا

سلم تصحيح امتحان مقرر الإحصاء الرياضي
لطلاب السنة الثالثة // رياضيات
الفصل الأول // 18/2/2025 // الدرجة : 100

- جواب السؤال الأول (20 درجة) :

- الطلب الأول (15 درجة) : بما أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X الذي يتبع التوزيع البواسوني بوسيط λ ($X \sim Poiss(\lambda)$) فإن : $f_{X_i}(x_i) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$ حيث $x_i = 0, 1, \dots$

وبالتالي لدينا وسيط واحد λ ومنه نجري مطابقة واحدة فقط $m_1 \equiv M_1$ حيث أن :

$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i = \bar{X}$ العزم العيني من المرتبة الأولى

$m_1 = EX = \mu = \lambda$ عزم المتغير العشوائي X من المرتبة الأولى

وبالمطابقة نجد أن :

$\lambda = \bar{X} \Leftarrow \boxed{\hat{\lambda} = \bar{X}}$ هو مقدر للوسيط λ بطريقة العزوم

- الطلب الثاني (5 درجات) : شرط الانصاف $E(\hat{\theta}) = \theta$ ولذلك :

$$\boxed{E(\hat{\lambda})} = E\bar{X} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \lambda = \frac{n \cdot \lambda}{n} = \boxed{\lambda}$$

إذن $\boxed{\hat{\lambda} = \bar{X}}$ هو مقدر منصف (غير متحاز) لـ λ.

- جواب السؤال الثاني (20 درجة) :

أ (10 درجات) : نفرض أن X متغير عشوائي يدل على وزن أكياس الملح، فإن :

$X \sim N(10, (0.2)^2)$ ويكون :

$$P(\bar{X} > 11) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{11 - 10}{0.2/\sqrt{10}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{\sqrt{10}}{0.2}\right) = P\left(Z > \frac{3.16}{0.2}\right) = P(Z > 15.8)$$

$$= 1 - P(Z \le 15.8) = 1 - \phi_Z(15.8) = 1 - 1 = \boxed{0}$$

ب (10 درجات) :

$$P(S > 0.2) = P(S^2 > 0.04) = P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} > \frac{(0.04)(9)}{0.04}\right)$$

$$= P(\chi^2_{(n-1)} > 9) = 1 - P(\chi^2_{(9)} \le 9) = 1 - 0.50 = \boxed{0.50}$$

② د. علي قبوري

جواب السؤال الثالث (20 درجة):

أ) (10 درجات): لدينا $n = 50 \geq 30$ و $Y = 18$ ومنه $\hat{p} = \bar{X} = \frac{Y}{n} = \boxed{0.36} \Leftarrow \hat{q} = \boxed{0.64}$

ولدينا أيضاً: $1-\alpha = 0.95 \Leftarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Leftarrow Z_{0.975} = 1.96$ ومجال الثقة لـ p بثقة $(1-\alpha).100\%$ هو:

$$p \in \left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right] = \left[0.36 - 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{50}}, 0.36 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow p \in [0.26, 0.45] \quad \text{بثقة } 95\%$$

ب) (5 درجة): لدينا $1-\alpha = 0.95 \Leftarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Leftarrow Z_{0.975} = 1.96$ والخطأ الأعظمي المطلق

$$\varepsilon = \left| \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right| = \left| \mp 1.96\sqrt{\frac{(0.36)(0.64)}{50}} \right| = \boxed{0.133}$$

ج) (5 درجة): لدينا $1-\alpha = 0.99 \Leftarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995 \Leftarrow Z_{0.995} = 2.575$ وحجم العينة المناسب:

$$n \geq \left[\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\varepsilon}\right]^2 = \left[\frac{2.575}{0.08}\right]^2 = 1036.04 \Rightarrow \boxed{n \geq 1037}$$

- جواب السؤال الرابع (20 درجة):

أ) (10 درجة): لدينا $1-\alpha = 0.99 \Leftarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.995$ وبما أن حجم العينة صغير $n < 30$ و μ و σ^2 مجهولان، نستخدم توزيع t - ستيودنت حيث أن:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.995}(9) = 3.25$$

وبالتالي مجال الثقة لـ μ:

$$\mu \in \left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[170 - (3.25) \cdot \frac{20}{\sqrt{10}}, 170 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \in [149.45, 190.55]} \quad \text{بثقة } 99\%$$

ب) (10 درجة): لدينا $1-\alpha = 0.95 \Leftarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$ ومن جدول توزيع كاي مربع:

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(9) = 2.70$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(9) = 19$

فيكون مجال الثقة للتباين:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] = \left[\frac{(9)(400)}{19}, \frac{(9)(400)}{2.70}\right]$$

$$= [189.47, 1333.33]$$

نهاية السلم: د. علي قبوري