سلم تصحيح مقرر الهندسة التفاضلية لطلاب السنة الرابعة رياضيات ف(1) 2024_025

1] تعريف التكافؤ بين تمثيلين: /5 علامات/

نقول عن تمثيلين $\vec{r}_1 : I_1 \to \mathbb{R}^3$ ، $\vec{r}_2 : I_2 \to \mathbb{R}^3$ أنهما متكافئان إذا وجدت دالة $\phi : I_2 \to I_1$ غامرة، مستمرة ومتزايدة تماماً تجعل المخطط التالي تبديلياً

أي $\vec{r}_1 \circ \phi = \vec{r}_2$.

$$\begin{array}{ccc} I_1 & \xrightarrow{r_1} & \mathbb{R}^3 \\ \phi \uparrow & \nearrow_{\vec{r}_2} & \\ I_2 & & \end{array}$$

إثبات أن أي منحنٍ مفتوح يقبل تمثيلاً بسيطاً معرفاً على المجال $]0,1[$. /15 علامة/

ليكن L منحنٍ مفتوح $\iff \exists\, \vec{r} :]a,b[\to \mathbb{R}^3$ ، $\vec{r}(]a,b[) = L$

لتكن $\phi :]0,1[\to]a,b[$ ، $\tau \mapsto (b-a)\tau + a$ وهي مستمرة على المجال $]0,1[$ كونها كثير حدود وأيضاً متزايدة تماماً على $]0,1[$ لأن $\phi'(\tau) = b-a > 0$

وأيضاً غامرة لأن:

ليكن $t \in]a,b[$ ، ويكون $(b-a)\tau + a = t$

$$\tau = \frac{t-a}{b-a} < 1$$

ليكن $\vec{r}^* :]0,1[\to \mathbb{R}^3$ حيث $\vec{r}^* = \vec{r} \circ \phi$ ومنه

$$\vec{r}^*(]0,1[) = \vec{r}(\phi(]0,1[)) = L$$

أي أن $\vec{r}^*$ تمثيل بسيط للمنحنى المفتوح L وواضح أن ϕ تقابل، مستمرة ومتزايدة تماماً كما نلاحظ أن ϕ تجعل المخطط تبديلياً ومنه $\vec{r}^* \sim \vec{r}$.

1- 5 درجات   2- 10 درجات   3- 5 درجات   4- 10 درجات

2] المعادلة الوسيطية للمنحنى L دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها a مسحوبة مرة واحدة بالاتجاه الموجب

$$s = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\|\, du \quad ; \quad \vec{r}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t)$$

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u}\, du = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

بالتالي فإن التمثيل الوسيطي الطبيعي يعطى بـ

$$\vec{r}(s) = \left(1 + a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a}\right)$$

$$l = s(2\pi) = 2\pi a$$

نفرض s_0 قيمة الوسيط الطبيعي للمبدأ في $\vec{r}_1$

$$\vec{r}_1(s_0) = \vec{0}$$

$$1 + \cos s_0 = 0 \Rightarrow \cos s_0 = -1 \Rightarrow s_0 = \pi$$

$$\sin s_0 = 0 \qquad \sin s_0 = 0$$

نقطة مشتركة بين C_1 و C_2 أي $\vec{r}_1(\pi) = \vec{r}_2(4\pi)$

$$\vec{r}_1(s) = (-\sin s, \cos s) \Rightarrow \vec{r}_1(\pi) = (0,-1)$$

$$\vec{r}_2(\omega) = \left(-\sin\frac{\omega}{4}, \cos\frac{\omega}{4}\right) \Rightarrow \vec{r}_2(4\pi) = (0,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(\pi) = \vec{r}_2(4\pi)$$

$$\dot{\vec{r}}_1(s) = (-\cos s, -\sin s) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1(\pi) = (1,0)$$

$$\dot{\vec{r}}_2(\omega) = \left(-\frac{1}{4}\cos\frac{\omega}{4}, -\frac{1}{4}\sin\frac{\omega}{4}\right) \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2(4\pi) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_1(\pi) \neq \dot{\vec{r}}_2(4\pi)$$

وبالتالي هناك تلامس من المرتبة الأولى.

$$\vec{r}(t) = (t - \cos t,\ 1 - \sin t,\ 0) \quad ; \ -\infty < t < \infty \qquad [2]$$

إن المنحنى $\mathcal{L}$ من الصنف C^∞ لوجود التمثيل الوسيطي $\vec{r}$ من الصنف C^∞

5) مركبات التمثيل من الصنف C^∞ (كثير حدود - دالة مثلثية)

بما أن التمثيل $\vec{r}$ من الصنف C^∞ فلا وجود للنقاط الشاذة والتي سببها عدم وجود المشتقة فالنقاط الشاذة إن وجدت سببها انعدام المشتق الأول فهي حلول المعادلة

$$\vec{r}\,'(\bar{t}) = \vec{0}$$

$$\vec{r}\,'(t) = (1 + \sin t,\ -\cos t,\ 0) = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin t = 0 \\ -\cos t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin t = -1 \\ \cos t = 0 \end{cases} \qquad /15/$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ t = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Longleftrightarrow t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

النقاط الشاذة هي النقاط الموافقة ل $t_k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$$\vec{r}(t_k) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ 2,\ 0\right)$$

لمعرفة نوعها

$$\vec{r}\,''(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$$

$$\vec{r}\,''(t_k) = (0,\ -1,\ 0) \neq \vec{0}$$

وبالتالي فإن النقاط الشاذة

شاذة ... لأن رتبة أول مشتق غير معدوم زوجية.

ثلاثية فرينيه:

$$\vec{r}\,'(0) = (1, -1, 0) \qquad \|\vec{r}\,'(0)\| = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\vec{t} = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}}$$

$$\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\,\vec{k} \qquad \|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\| = 1$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''}{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|} = \frac{(0,0,1)}{1} = (0,0,1) \Rightarrow \boxed{\vec{b} = (0,0,1)}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

مطلب / 5 درجات /

$$\boxed{\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)}$$

$$K = \frac{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|}{\|\vec{r}'\|^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ التقوس

المستوي الملاصق $\vec{r}(0) = (-1, 1, 0)$: $[\vec{R} - \vec{r}(t_0), \vec{t}, \vec{n}] = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff z = 0$$

أو طريقة أخرى

$$(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{b} = 0$$

$$(x+1, y-1, z) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\boxed{z = 0}$$

- $$\vec{R}_c = \vec{r}(t_0) + \frac{1}{K(t_0)} \vec{n}(t_0)$$

$$= (-1, 1, 0) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (-1, 1, 0) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$= (1, 3, 0)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 8$$

معادلة دائرة التقوس هي تقاطع الكرة السابقة مع المستوي الملاصق

- $$\tau = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{\|\vec{r}' \wedge \vec{r}''\|^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\vec{r}'''(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \Rightarrow \vec{r}'''(0) = (0, +1, 0)$$

$$[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''] = (\vec{r}' \wedge \vec{r}'') \cdot \vec{r}''' = (0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

أو

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

المستقيم المماس $\vec{R} - \vec{r}(t_0) = u\,\vec{t}$

$$(x+1, y-1, z) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \iff x+1 = \frac{u}{\sqrt{2}},\ y-1 = \frac{-u}{\sqrt{2}}$$

$$z = 0$$