جامعة دمشق	امتحان مقرر	الفصل الأول2025/2024
كلية العلوم	نظرية الاحتمالات	التاريخ:2025/02/09
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الثالثة رياضيات	المدة: ساعتين

س1 (20 درجة): برهن ما يلي:

أ- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$.

ب- إذا كان X وY مستمرين ومستقلين وكان $M_X(t)$ و$M_Y(t)$ الدالتين المولدتين لعزوميهما وبفرض $Z = X + Y$ عندئذ فان $M_Z(t) = M_X(t) \times M_Y(t)$.

س2 (40 درجة): ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أ- أثبت أن $\lambda = \frac{1}{2}$.

ب- عين دالة التوزيع المتجمع لـX ثم احسب $F(0)$ و $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right)$

ج- أوجد كثافة المتغير $Y = X^2$.

د- احسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لـX.

س3 (30 درجة): ليكن X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة الكثافة المشتركة:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أ- برهن أن $f(x,y)$ دالة كثافة مشتركة فعلية لـ(X,Y).

ب- عين الكثافات الاحتمالية الهامشية $f_X(x)$ و$f_Y(y)$.

ج- احسب الاحتمالات التالية: $P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \ Y > 0\right)$ و $P\left(Y < \frac{1}{2}\right)$.

د- بفرض $U = X$ و $V = XY$ عين كثافة (U,V) ثم استنتج كثافة V.

هـ- احسب معامل الارتباط $\rho(X,Y)$، وهل X وY مستقلان أم لا؟

س4 (10 درجة): ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة الكثافة:

$$f_X(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

حيث $0 < p < 1$ و n عدد صحيح موجب، والمطلوب بين أن الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمالية فعلية لـX.

انتهت الأسئلة

أرجو لكم التفوق والنجاح

د. علي قبوي

①

د. علي قنبري

سلم تصحيح امتحان مقرر نظرية الاحتمالات

لطلاب السنة الثالثة // رياضيات

الفصل الأول // 9/2/2025 // الدرجة: 100

- جواب السؤال الأول: (20 درجة): (10 درجات لكل طلب)

أ) لدينا تعريفاً:

$$V(X+Y) := E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2$$

$$= [EX^2 + EY^2 + 2E(X \cdot Y)] - [(EX)^2 + (EY)^2 + 2EXEY]$$

$$= [EX^2 - (EX)^2] + [EY^2 - (EY)^2] + 2[EX \cdot Y - EX \cdot EY]$$

$$:= V(X) + V(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$$

ب)

$$M_Z(t) := E(e^{t \cdot Z}) = E(e^{t(X+Y)})$$

$$:= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+y)} \cdot f_{X,Y}(x,y)\, \partial x \partial y$$

وبما أن X و Y مستقلان فإن: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ وبالتالي:

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+y)} \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\, \partial x \partial y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f_X(x)\, \partial x \cdot \int e^{ty} \cdot f_Y(y)\, \partial y$$

$$= E(e^{tX}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

- جواب السؤال الثاني: (40 درجة): (10 درجات لكل طلب)

أ) بما أن $f_X(x)$ دالة كثافة احتمالية فعلية، فإنها تحقق الشرط: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$ وبالتالي:

$$\int_{-1}^{+1} \lambda\, dx = 1 \Rightarrow \lambda [x]_{-1}^{+1} = 1 \Rightarrow \lambda(1+1) = 1 \Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$$

ب) لدينا تعريفاً: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$ وبالتالي:

① من أجل $x \le -1$: $F_X(x) = 0$ ② من أجل $+1 \le x$ فإن $F_X(x) = 1$

③ من أجل $-1 < x < 1$ فإن:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{-1} (0)\, dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\, dt = 0 + \left[\frac{t}{2}\right]_{-1}^{x} = \frac{x+1}{2}$$

③ د. علي قبوي

$$P(Y<\tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 2y\,dy = \left[y^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$ ج

$$P(0<X<\tfrac{1}{2}, Y>0) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1 4xy\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx$$

$$= \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

د

$$U = X \Rightarrow X = U = \psi_1(U,V)\ ; 0<x<1 \Rightarrow \quad 0<u<1$$

$$V = X.Y \Rightarrow V = U.Y \Rightarrow Y = \frac{V}{U} = \psi_2(U,V); 0<y<1 \Rightarrow$$

$$0<\frac{v}{u}<1 \Rightarrow 0<v<u<1$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{u}}$$

فطبق المبرهنة:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{X,Y}(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v)).|J|$$

$$= 4.u.\frac{v}{u}.\left|\frac{1}{u}\right| = \frac{4.v}{u}$$

إذاً:

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} 4.\frac{v}{u} & ; 0<u<1, 0<v<u<1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ومنه كثافة V هي:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,\partial u = \int_v^1 4.\frac{v}{u}\,du = 4v\left[\ln u\right]_v^1 = 4v(0-\ln v)$$

$$= -4v\ln v \quad ; \quad 0<v<1$$

هـ نلاحظ أن

$$f_{X,Y}(x,y) = 4X.Y = 2X.2Y = f_X(x).f_Y(y)$$

إذن المتغيرين X و Y مستقلين لتحقق شرط الاستقلال وبالتالي سيكون $\rho(X,Y)=0$

جواب السؤال الرابع (10 درجة): (10 درجات لكل طلب)

أ يجب تحقق الشرطان: ① $f_X(x) \geq 0$ وهو محقق فرضاً.

② $\sum_x f_X(x) = 1$ ولبرهان ذلك لدينا:

$$\sum_x f_X(x) = \sum_{x=0}^{x=n} \frac{n!}{x!(n-x)!}.p^x.(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{x=n} C_x^n.p^x.(1-p)^{n-x} = \left[p+(1-p)\right]^n \quad \text{(حسب منشور ثنائي حدينوتن)}$$

$$= [1]^n = 1$$

نهاية السلم د. علي قبوي