حل نموذج ميكانيك (1)

السؤال الأول: (30 درجة)

الحل: درجات الحرية 2 : x, y

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_e^2)$$ 5

$$v_x^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \Rightarrow$$

$$v_e = \omega \wedge r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega x \vec{k}$$

$$v_e^2 = \omega^2 x^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 x^2)$$ 5

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = m\dot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$ 5

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x},$$

$$\delta W = -mg \int dy + m\lambda^2 \int \vec{r} \cdot d\vec{r}$$
$$= -mgy + m\frac{\lambda^2}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = m\lambda^2 x$$ 5

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial (T+W)}{\partial q_j}$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x + m\lambda^2 x$$

$$m\ddot{x} - m\omega^2 x - m\lambda^2 x = 0$$

$$\ddot{x} = (\lambda^2 + \omega^2) x$$ 5

$$m\ddot{y} + mg - m\lambda^2 y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = \lambda^2 y - g$$

- بكتابة المعادلة الكيفية $T = u + h$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 x^2)$$ 5

$$= -mgy + \frac{m}{2}\lambda^2 (x^2 + y^2) + h$$

$$= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2 x^2)$$

$$T = -gy + \frac{\lambda^2}{2}(x^2 + \dots) + h$$

السؤال الثاني: (20 درجة)

① قانون العطالة:

إذا لم تؤثر على الجسم المادي أي قوى خارجية فإنه يحافظ على حالته السكونية أو يكون حركته منتظمة في خط مستقيم.

② قانون التأثير المتبادل

$$m\vec{r} = \vec{F}$$ 10

حيث الكتلة بالكيلوجرام والقوى بالكيلوجرام والتسارع بالمتر/ثانية.

③ قانون الفعل ورد الفعل:

كل قطعة مادية تؤثر على قطعة أخرى بقوة تساوي في المقدار وتعاكسها في الاتجاه والخط الواصل بينهما.

④ من قانون التأثير المتبادل:

$$m\vec{r} = \vec{F}$$

نضرب المعادلة اتجاهياً بـ $d\vec{r}$

$$m\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ 10

$$m d\vec{v} \cdot \vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

وبالتالي $T = \frac{1}{2} mv^2$

ثالثاً: (درجة 25)

$\vec{F} = -2m\vec{r}$

لقوى الكونية:

قوة ثقل $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{F} = -2mg(x\vec{i} + y\vec{j})$ 5

$F_x = mx''$ ، $F_y = my''$

حسب شرط أويلر:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$ 5

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

القوة تحقق شرط أويلر

القوة $F = -2mr$

قوة كونية.

وحسب نظرية السحب فإن قوة الثقالة 5 كونية.

لدينا تابع الكمون وهنا أن تابع الكمون للقوة ما هو إلا قيمة عن عمل القوة للانتقال وبالتالي فإن قوة الثقالة شاقولية وانتقال النقطة 5 فعمل القوة صفر) وبالتالي لدينا تابع كمون لهذا الحقل.

$$U = -2\int mr\,dr$$

$$U = -2m\frac{r^2}{2} = -mr^2$$ 5

تابع الكمون للقوة

$\vec{F} = -2m\vec{r}$.

السؤال الرابع: (درجة 25)

$\vec{F} = m\vec{\gamma}$

من دستور بينيه لدينا

$$-mc^2u^2(u''+u) = -mku^2$$

$$u''+u = \frac{k}{c^2}\ ,\ u = \frac{1}{r}$$ 5

هذه المعادلة تفاضلية ذات أمثال ثابتة وطرف ثاني

$u_1 = \frac{k}{c^2}$ حل خاص نلاحظ أن

$u'' + u = 0$ المعادلة المتجانسة المرافقة

الحل العام:

$u = a\cos(\varphi + \alpha)$ 5

$$u = \frac{1}{r} = \frac{k}{c^2} + a\cos(\varphi+\alpha)$$

الثوابت a, α تحدد من الشروط الابتدائية

باختيار مناسب للمحور القطبي نأخذ $\alpha = 0$

$$u = \frac{k}{c^2}\left(1 + \frac{ac^2}{k}\cos\varphi\right)$$

$$r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$ 5

حيث لدينا

$e = \frac{ac^2}{k}$ و $p = \frac{c^2}{k}$ حيث

p - هو وسيط القطع

e - الشذوذ المركزي