جامعة دمشق | السنة الرابعة
كلية العلوم | المدة: ساعتان

امتحان الفصل الاول – رياضيات(تحليل) – تبولوجيا٢ – ٢٠٢٥/٢/١١ - ١١،٣٠ -١٣،٣٠

أجب عن سؤالين من الأسئلة الثلاثة التالية:

السؤال الأول: عرّف المرشِحة، المرشِحة الاعظمية، الفضاء الناظمي ثم اثبت ان كل فضاء متري هو فضاء ناظمي. 20 درجة

السؤال الثاني: برهن ان الصورة المباشرة لمرشِحة ، وفق تطبيق غامر هي مرشِحة. 20 درجة

السؤال الثالث: اذا زوّدنا $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية بالتبولوجيا المولّدة بصفت المجالات المفتوحة من اليسار والمغلقة من اليمين فأثبت أن الفضاء التبولوجي الناتج هو فضاء هاوسدورفي وليس فضاء" متراصا" وليس فضاء" مترابطا". 20 درجة

اجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الرابع: عرّف الكلمات التالية: 15 درجة

عملية ضرب طريقين في فضاء متري – تثليث الفضاء التبولوجي -الفضاء المترابط مساريا.

السؤال الخامس: 25 درجة

أثبت صحة المبرهنة التالية:

مبرهنة: ليكن $f,g\colon X\longrightarrow Y$ تابعان مستمران، $x_0\in X$ بحيث $f\sim g\ rel\{x_0\}$ ، عندئذ f^* يساوي g^* على $\pi_1(X,x_0)$ حيث $\pi_1(Y,x_1)$ $f^*,g^*\colon \pi_1(X,x_0)\longrightarrow$.

السؤال السادس: 15 درجة

اكتب تثليثا" موجّها" لرباعي الوجوه: $\sigma_1^3=p_0p_1p_2p_3$ ، ثم أحسب $\partial_3\sigma_1^3$ ؟

السؤال السابع : 5 درجات

بفرض أن α,β طريقان على سطح الكرة الواحدية S^2 كل منهما يبدأ في $x_0=(+1,0,0)$ وينتهي في $x_1=(-1,0,0)$ برهن أن $\alpha\sim\beta(rel\{0,1\})$.

نهاية الأسئلة

A_1

جواب السؤال :

٢٤ درجة

← المرشحة : f مرشحة لـ X $\Leftrightarrow$ $P(X) \supseteq f$ وتحقق :

4

1) $f \neq \phi$ and $\phi \in f$

2) $A, B \in f \Rightarrow A \cup B$ and $A \cap B \in f$

3) $A \in f$, $D \supseteq A \Rightarrow D \in f$

← المرشحة الأعظمية : f مرشحة أعظمية على X $\Leftrightarrow$ f مرشحة تحقق الشرط :

4) $\forall A \subseteq X$: $A \in f$ or $A^c \in f$

← (X, τ) فضاء T_3 $\Leftrightarrow$ إذا كانت F المغلقة في X

وكانت $x_0 \notin F$ نقطة من X فإنه توجد مفتوحتان O_F

و O_{x_0} تحوي أولاهما F والأخرى تحوي x_0 وبحيث

$O_{x_0} \cap O_F = \phi$

← (X, τ) فضاء T_4 $\Leftrightarrow$ إذا كانت F_1 , F_2 مغلقتين

منفصلتين وغيرخاليتين فإنه توجد مفتوحتان O_1 و O_2

تحوي الأولى F_1 وتحوي الثانية F_2 و $O_1 \cap O_2 = \phi$

← البرهنة : خذ $\phi(x) = \dfrac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$ تجد أن f مستمر

وإذا كانت $x \in F_1$ فإن $\phi(x) = 0$ وإذا كانت $x \in F_2$ فإن $\phi(x) = 1$

ونرى أن $O_1 = \{x : \phi(x) < \frac{1}{2}\}$ مفتوح يحوي F_1

ونرى أن $O_2 = \{x : \phi(x) > \frac{1}{2}\}$ // // F_2 وأن $O_1 \cap O_2 = \phi$

A_2

السؤال الثاني (٤ درجة)

الفرض: $\mathcal{F}$ مرشحة على X و $g : X \longrightarrow Y$ تطبيق غامر

الطلب: $g(\mathcal{F}) = \{ g(A) : A \in \mathcal{F} \} \equiv \mathcal{F}_1$ مرشحة على Y

الإثبات:

1) لدينا $\mathcal{F}_1 \neq \phi$ ذلك لأن $g(X) = Y \in \mathcal{F}_1$

2) لكون $A \neq \phi$ مهما $A \subseteq X$ يقتضي $g(A) \neq \phi$ اذن $\mathcal{F}_1 \not\ni \phi$

نؤجل إثباتها إلى حين نثبت 3)

4) لنكن

$$A_1 \in \mathcal{F}_1 \ , \ D_1 \supseteq A_1 \Rightarrow D_1 \in \mathcal{F}_1$$

$\therefore A_1 = g(A)$ من أجل A مناسب

و

$$D_1 \supseteq g(A)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(D_1) \supseteq g^{-1}(g(A)) \supseteq A$$

$$\Rightarrow g^{-1}(D_1) \in \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow g(g^{-1}(D_1)) \in \mathcal{F}_1$$

لكن $g(g^{-1}(D_1)) = D_1$ لأن g غامر اذن $D_1 \in \mathcal{F}_1$

نعود 2): يكفي اثبات

$$A_1, B_1 \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow A_1 \cap B_1 \in \mathcal{F}_1$$

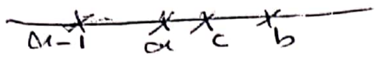
$A_1 = g(A)$, $B_1 = g(B)$, $A_1 \cap B_1 = g(A) \cap g(B)$
$\supseteq g(A \cap B)$

و لكن $g(A \cap B) \in \mathcal{F}_1$ اذن $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{F}_1$ و يتحقق المراد

A3

السؤال الثالث (٢٠ درجة)

- $(\mathbb{R}, \tau)$ فضاء T_2



لنأخذ $a<b$

إذاً ثمة $a<c<b$ نعرف $O_b =]c,b]$ جوار لـ b

$O_a =]a-1, c]$ جوار لـ a

و $O_a \cap O_b = \phi$

أو أي طريقة أخرى

4

- ليس متراصاً: نعرف $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n,n]$

والتغطية $\{]-n,n]=O_n\}$ هي تغطية مفتوحة ولكن

لأي جماعة جزئية منها ومنتهية لا تغطي $\mathbb{R}$

فهو ليس متراصاً

6

- إن المجموعة $A=]0,10]$ مجموعة مفتوحة ومتممها

$A^c =]-\infty,0] \cup]10,\infty[$ اتحاد مفتوحتين

ذلك لأن

$]-\infty,0] = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n,0]$

$]0,\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]\frac{1}{n},n]$

وبالتالي A^c مفتوح إذاً A مغلق (وهي مفتوحة) و

$A \neq \phi$ و $A \neq \mathbb{R}$ فالفضاء ليس مترابطاً

10

السؤال الرابع (15 درجة)
عرّف الكلمات التالية:
عملية ضرب طريقين في فضاء متري:
اذا كان $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ طريقان في فضاء متري (X, d) بحيث $\alpha(1) = \beta(0)$ فإن

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

هو ناتج ضرب الطريقين α و β:

تثليث الفضاء التبولوجي:
اذا كان X فضاء تبولوجي ما ووجد مبسط مركب K ووجد هوميومورفيزم $f : |K| \longrightarrow X$ نقول أن K تثليث للفضاء X.

الفضاء المترابط مساريًا:
نقول أن الفضاء X مترابط مساريًا إذا وجد بين كل نقطتين من نقاطه طريق يصل بينهما محتوى في الفضاء X.

السؤال الخامس: (25 درجة)
اثبت صحة المبرهنة التالية:
مبرهنة: ليكن $f, g : X \longrightarrow Y$ تابعان مستمران، $x_0 \in X$ بحيث $f \sim g \ rel\{x_0\}$
عندئذ f^* يساوي g^* على $\pi_1(X, x_0)$ حيث $f^*, g^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_1)$
الإثبات:
ليكن $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ عندئذ لدينا بالتعريف

$$f^*[\alpha] = [f \circ \alpha] \ , \ g^*[\alpha] = [g \circ \alpha]$$

والمطلوب برهان $f \circ \alpha \sim g \circ \alpha \ rel\{0,1\}$ حيث $f \circ \alpha$ ، $g \circ \alpha \in C(X, x_1)$
من اجل $\alpha \in C(X, x_0)$.
لدينا فرضاً $f \sim g \ rel\{x_0\}$ اذن هناك تابع مستمر $F : X \times I \longrightarrow Y$ بحيث

$$F(x, 0) = f(x) \ , F(x, 1) = g(x)$$

$$F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0) = x_1 \ (\forall \ t \in I)$$

إن $f \circ \alpha \sim g \circ \alpha \ rel\{0,1\}$ لوجود التابع المستمر $G : I \times I \longrightarrow Y$
بحيث $\forall s, t \in I : G(s, t) = F(\alpha(s), t)$.

لكن الآن

$$G(s,0)=F(\alpha(s),0)=f(\alpha(s))=(f\circ\alpha)(s)$$
$$G(s,1)=F(\alpha(s),1)=g(\alpha(s))=(g\circ\alpha)(s)$$
$$G(0,t)=F(\alpha(0),t)=F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)$$
$$\Rightarrow G(0,t)=(f\circ\alpha)(0)=(g\circ\alpha)(0)\quad(\forall t\in I)$$
$$G(1,t)=F(\alpha(1),t)=F(x_0,t)=f(x_0)=g(x_0)$$
$$\Rightarrow G(1,t)=(f\circ\alpha)(1)=(g\circ\alpha)(1)\quad(\forall t\in I)$$

اذن $f\circ\alpha \sim g\circ\alpha \ rel\{0,1\}$

ومنه $[f\circ\alpha]=[g\circ\alpha] \Leftarrow f^*[\alpha]=g^*[\alpha]$

اذن $f^*=g^*$ على $\pi_1(X,x_0)$.

السؤال السادس:

اكتب تثليثاً موجهاً لرباعي الوجوه $\sigma_1^3=P_0P_1P_2P_3$ ثم احسب $\partial_3\sigma_1^3$.

الحل:

التثليث المطلوب هو:

$$K=\left\{\begin{array}{l} P_0=\sigma_1^0,\ P_1=\sigma_2^0,\ P_2=\sigma_3^0,\ P_3=\sigma_4^0,\ P_0P_1=\sigma_1^1,\ P_1P_2=\sigma_2^1,\ P_2P_0=\sigma_3^1 \\ P_0P_3=\sigma_4^1,\ P_3P_2=\sigma_5^1,\ P_1P_3=\sigma_6^1,\ \sigma_1^2=P_0P_1P_2,\ \sigma_2^2=P_0P_2P_3 \\ \sigma_3^2=P_0P_1P_3,\ \sigma_4^2=P_1P_2P_3,\ \sigma_1^3=P_0P_1P_2P_3 \end{array}\right\}$$

حساب $\partial_3\sigma_1^3$. لدينا تعريفاً

$$\partial_3\sigma_1^3=\sum_{i=1}^{4}[\sigma_1^3:\sigma_i^2]\,\sigma_i^2$$

اذن يجب حساب الأعداد $[\sigma_1^3:\sigma_i^2]$ حيث $i=1,2,3,4$.

$i=1$ لدينا $\sigma_1^2=P_0P_1P_2$ والرأس في σ_1^3 غير المشترك مع σ_1^2 هو P_3

ولدينا $P_3\sigma_1^2=P_3P_0P_1P_2$ ، $\sigma_1^3=P_0P_1P_2P_3$

ولدينا اتجاه $P_3\sigma_1^2$ من اتجاه $P_0P_3P_1P_2$ ـ وهو من اتجاه $P_0P_1P_3P_2=-(-(P_0P_1P_3P_2))$

وهذا من اتجاه $P_0P_1P_2P_3$ ـ اذن $\sigma_1^3=-P_3\sigma_1^2$

وبالتالي $[\sigma_1^3:\sigma_1^2]=-1$

$i=2$ لدينا $\sigma_2^2=P_0P_2P_3$ والرأس في σ_1^3 غير المشترك مع σ_1^3 هو P_1

اذن $P_1P_0P_2P_3 = P_1\alpha^2_2$ هو من اتجاه $-P_0P_1P_2P_3 = -\alpha^3_1$

اذن $\alpha^3_1 = -P_1\alpha^2_2$ إذن $[\alpha^3_1:\alpha^2_2]=-1$

$i=3$ لدينا $\alpha^2_3 = P_0P_1P_3$ والرأس من α^3_1 غير المشترك مع α^3_1 هو P_2

اذن $P_2P_0P_1P_3 = P_2\alpha^2_3$ هو من اتجاه $-P_0P_2P_1P_3$ وهذا من اتجاه $-(-P_0P_1P_2P_3) = P_0P_1P_2P_3 = \alpha^3_1$

اذن $\alpha^3_1 = +P_2\alpha^2_3$

وبالتالي $[\alpha^3_1:\alpha^2_3]=+1$

$i=4$ لدينا $\alpha^2_4 = P_1P_2P_3$ والرأس غير المشترك مع α^3_1 هو P_0

ولدينا $\alpha^3_1 = P_0P_1P_2P_3 = P_0\alpha^2_4$ اذن $\alpha^3_1 = +P_0\alpha^2_4$

اذن $[\alpha^3_1:\alpha^2_4]=+1$

اذن $\partial_3\alpha^3_1 = -\alpha^2_1 - \alpha^2_2 + \alpha^2_3 + \alpha^2_4$

السؤال الرابع (5 درجات)

بفرض أن α و B طريقان على سطح الكرة الواحدية S^2 كل منهما يبدأ في $x_0 = (+1,0,0)$ وينتهي في $x_1 = (-1,0,0)$ برهن أن $\alpha \sim B \ rel\{0,1\}$

الحل:

لاحظ أن $\bar{B}^1 : I \longrightarrow S^2$

هو طريق يبدأ في x_1 وينتهي في x_0

في حين α يبدأ من x_0 اذن عملية الضرب

$\alpha.\bar{B}^1$ ممكنة وتعطينا $\alpha.\bar{B}^1$ طريق يبدأ في x_0 وينتهي في x_0

اذن: $[\alpha.\bar{B}^1] \in \pi_1(S^2, x_0)$ ، ونعلم أن $\pi_1(S^2, x_0) = \{[1]\}$

اذن $[\alpha.\bar{B}^1] = [1]$ ومنه $\alpha.\bar{B}^1 \sim 1 \ rel\{0,1\}$

حيث 1 هو الطريق الصفري في x_0.

اذن بحسب نظريات سابقة يمكن أن نكتب

$(\alpha.\bar{B}^1).B \sim 1.B \ rel\{0,1\}$ ، $1.B \sim B \ rel\{0,1\}$

$\alpha.(\bar{B}^1.B) \sim (\alpha.\bar{B}^1).B \ rel\{0,1\}$

$\alpha.(\bar{B}^1.B) \sim \alpha \ rel\{0,1\}$

نستنتج اذن كون العلاقة $\sim$ متعدية أن

$\alpha \sim B \ rel\{0,1\}$

نهاية سلم التصحيح

أ.د. بشير قابيل

م.أ. احمد ماهر [illegible]

مدرس المقرر

د. بشير قابيل