الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي- جامعة دمشق
كلية العلوم - قسم الرياضيات

**اختبار الفصل الأول**
**السنة الثالثة: رياضيات**
**المادة: تحليل 5**

التاريخ:
الوقت:
الاسم:

---

**السؤال الأول(25 درجة)**: جد التغير الكلي لكل من الدالتين الآتيتين مع الرسم:

$$f(x)=x^2-2x:\quad x\in[0,4]\quad , \quad g(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x<3 \\ 8 & x=3 \\ x+2 & 3<x\le 6 \end{cases}$$

**السؤال الثاني(20 درجة)**: احسب تكامل استيلجس لكل من الدالتين الآتيتين مع رسم $g(x)$:

1. $\displaystyle\int_0^6 f(x)dg(x): f(x)=x^2+1 \quad : \quad g(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 2 \\ 3 & 2<x<4 \\ 6 & 4\le x\le 6 \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_0^6 f(x)dg(x): \quad f(x)=x^2+1: \quad g(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 2 \\ x+1 & 2<x<4 \\ x+2 & 4\le x\le 6 \end{cases}$

**السؤال الثالث(25 درجة)**: إذا كانت $f$ دالة معرفة على المجال [0,2] كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & x\in Q \\ -3 & x\notin Q \end{cases}$$

والمطلوب:

1. ارسم الدالة $f$ (بشكل تقريبي)، ثم أثبت أنها محدودة.
2. جد التغير الكلي للدالة $|f|$ ، ثم أثبت أن الدالة $f$ ليست ذات تغير محدود.
3. أثبت أن الدالة $f$ غير قابلة للمكاملة (غير كمولة) حسب ريمان.

**السؤال الرابع(15 درجة)**: ارسم الدالة $f(x)=[x]+3: \quad x\in[0,3]$ ثم احسب تكامل لوبيغ المعرف كما يلي: $\displaystyle\int_{[0,3]} f(x)d\mu$

**السؤال الخامس(15 درجة)**: عرف الجبر ثم أثبت أنه مغلق بالنسبة لجميع العمليات:

(الاجتماع، التقاطع، الفرق، الفرق التناظري، المتمم).

---

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

١/

سُلّم تصحيح تحليل ٥

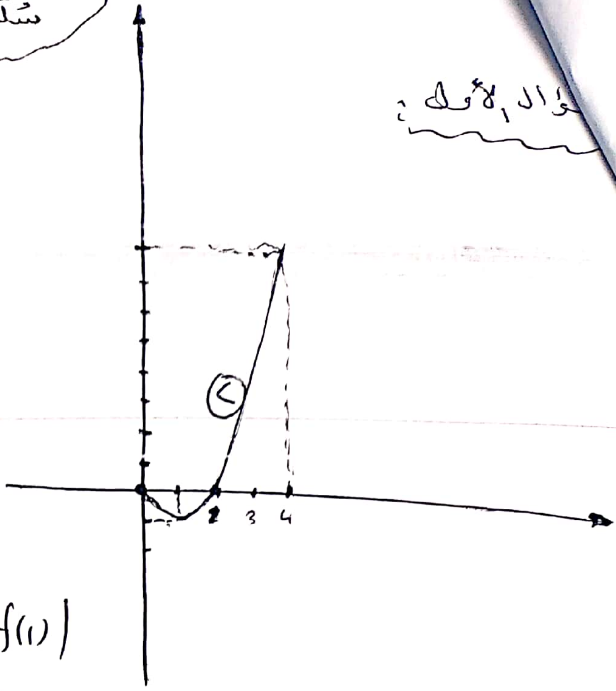
السؤال الأول :

$f(x) = x^2 - 2x \quad : \quad x \in [0,4]$

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 2 = 0$

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 - 2 = -1$ ٤

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $8$ |




$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0 , x = 2$

$$\overset{4}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{4}{\underset{1}{V}} f = |f(1) - f(0)| + |f(4) - f(1)| \quad ١ \quad ٢$$

$$= |-1 - 0| + |8 - (-1)| = 10 \quad ١ \quad ٢$$

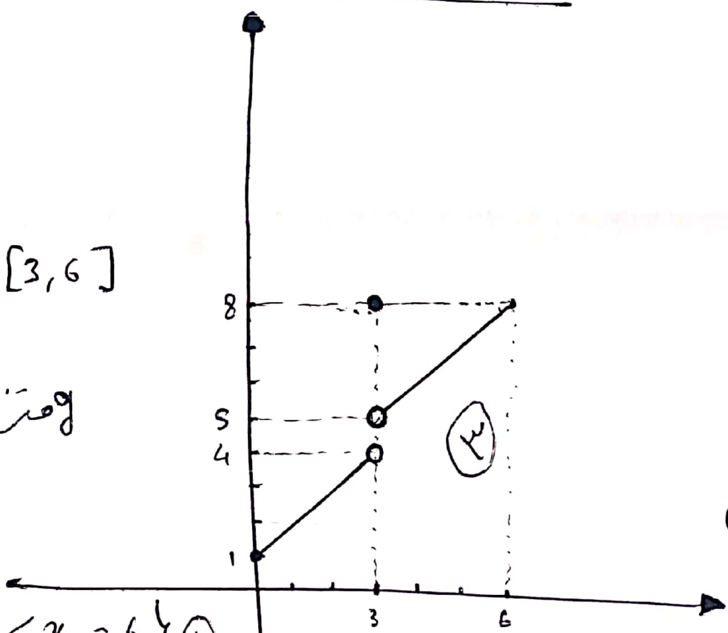
---

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x < 3 \\ 8 & x = 3 \\ x+2 & 3 < x \le 6 \end{cases}$$

$$\overset{6}{\underset{0}{V}} g = \overset{3}{\underset{0}{V}} g + \overset{6}{\underset{3}{V}} g \quad ١ \quad : [0,3] \cup [3,6]$$

$$\overset{3}{\underset{0}{V}} g = |g(3) - f(0)| \qquad g \text{ متزايدة}$$

$$= |8 - 1| = 7 \quad ٢$$




$[3,6] \ . \ P = \{x_0 = 3 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < x_n = 6\}$ ١

$$V(g,P) = |f(x_1) - f(3)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})| \quad ٢$$

$$= |x_1 + \underbrace{2 - 8}_{-6}| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|$$

$$= 6 - x_1 + \cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \cdots + \cancel{x_{n-1}} - x_{n-2} + \underbrace{x_n}_{6} - \cancel{x_{n-1}}$$

$$= 12 - 2x_1 \quad ٢ \quad \Rightarrow \overset{6}{\underset{3}{V}} g = \sup_P (12 - 2x_1) = 6 \quad ٢$$

$$\overset{6}{\underset{0}{V}} g = 7 + 6 = 13$$

$$I=\int_0^6 f(x)\,dg(x) \quad : f(x)=x^2+1$$

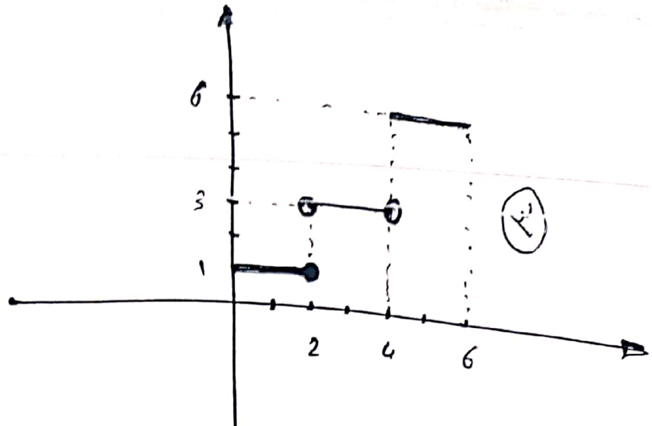
$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 2\\ 3 & 2< x<4\\ 6 & 4\le x\le 6\end{cases}$$

$$I=f(2)\left[g(2+0)-g(2-0)\right]$$ ٢

$$+\,f(4)\left[g(4+0)-g(4-0)\right]$$

$$=5\left[3-1\right]+17\left[6-3\right]$$ ٢

$$=10+51=61$$ ١



٢

$c_1=2,\ c_2=4$

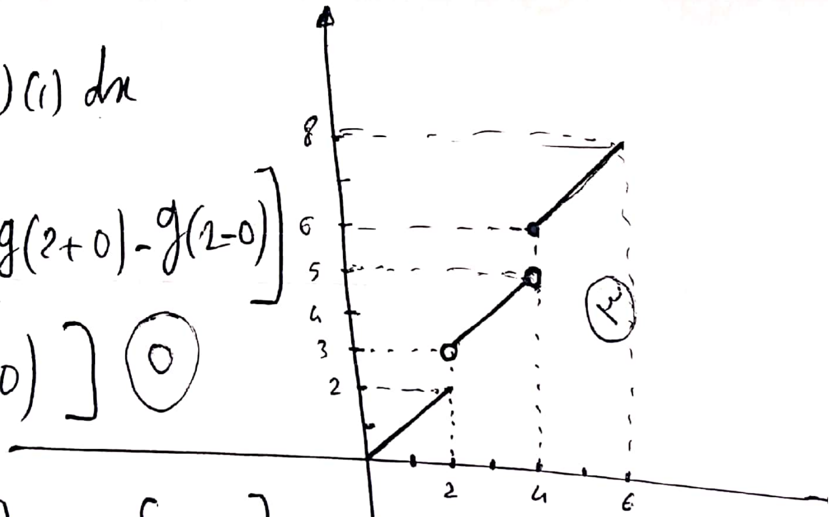
---

$$I=\int_0^6 f(x)\,dg(x) \quad : f(x)=x^2+1 \quad : g(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 2\\ x+1 & 2<x<4\\ x+2 & 4\le x\le 6\end{cases}$$

$$I=\int_0^2 (x^2+1)(1)\,dx+\int_2^4 (x^2+1)(1)\,dx$$

$$+\int_4^6 (x^2+1)(1)\,dx+f(2)\left[g(2+0)-g(2-0)\right]$$

$$+f(4)\left[g(4+0)-g(4-0)\right]$$ ٥



٢

$$=\int_0^6 (x^2+1)\,dx+5\left[3-2\right]+17\left[6-5\right]$$ ١ ١

$c_1=2,\ c_2=4$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^6+22$$ ١

$$=\frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{6})(36)+6+22=2(36)+28$$

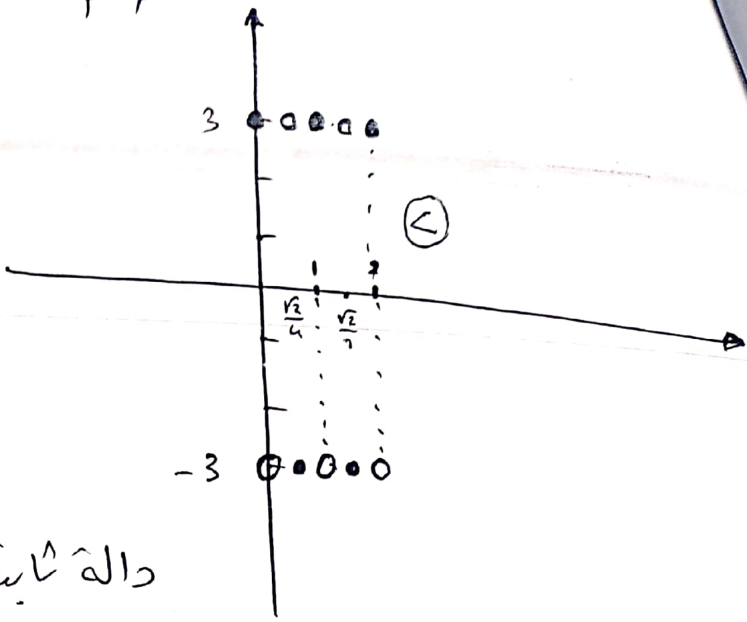
$$=72+28=100$$ ١

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ -3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in [0, 2]$$

: الحل

1) $|f(x)| \leq 3$

$\forall x \in [0, 2]$ ©



2) $|f(x)| = 3$ دالة ثابتة

$\overset{2}{\underset{0}{V}} |f| = 0$ ©

$P = \{ x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots x_{n-1} < x_n = 2 \}$ ©

$V(f, P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$ ©

$= |-3 - 3| + |3 - (-3)| + \cdots + |3 - (-3)|$ ©

$= \underbrace{6 + 6 + \cdots + 6}_{\text{مرة } n} = 6n$ ©

$\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \sup_{P} (6n) = \lim_{n \to \infty} (6n) = +\infty$ ①

وبالتالي الدالة ليست ذات تغير محدود

٤/ 3)

f غير قابلة للمكاملة حسب ريمان

لتكون f قابلة للمكاملة على [0,2] يجب تحقق الشرط

$$\exists A \in \mathbb{R} : A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k \quad ©$$

من أجل تجزئة P كيف

$$P = \{ x_0 = 0 < x_1 < x_2 < x_3 \dots x_{n-1} < x_n = 2 \}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad , \quad x_{k-1} \le t_k \le x_k$$

$$\Delta x = \max_k (\Delta x_k)$$

نناقش حالتين :

1) $t_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = 3$ ©

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} 3 \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 3 \lim_{\Delta x \to 0} [\cancel{x_1} - x_0 - \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \dots + x_n - \cancel{x_{n-1}}]$$

$$= 3[2 - 0] = 6 \quad ©$$

2) $t_k \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = -3$ ©

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} -3 \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = -3 \lim_{\Delta x \to 0} [x_1 - x_0 + x_2 - x_1 \dots + x_n - x_{n-1}]$$

$$= -3[2 - 0] = -6 .$$ ©

نلاحظ أن $A = 3$ , $A = -3$ , هذا تناقض وبالتالي

f غير قابلة للمكاملة على [0,2] . ( غير كمولة )

السؤال الرابع:

$f(x) = [x] + 3 \quad : x \in [0,3]$

$X = [0,3]$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \le x < 1 \\ 4 & 1 \le x < 2 \\ 5 & 2 \le x < 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$ ٤

$$I = \int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{4} c_i \, \mu[A_i]$$ ٤

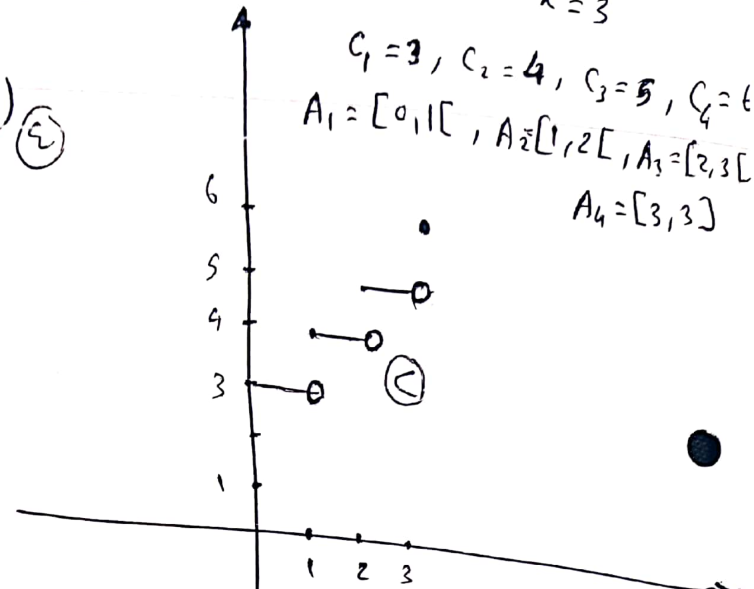
$c_1 = 3, \; c_2 = 4, \; c_3 = 5, \; c_4 = 6$

$A_1 = [0,1[, \; A_2 = [1,2[, \; A_3 = [2,3[$

$A_4 = [3,3]$

$$= 3(1) + 4(1) + 5(1) + 6(1)$$ ٤

$I = 18$ ١




٤

السؤال الخامس: عرف الجبر واثبت أنه مغلق بالنسبة لجميع العمليات.

الجبر: ليكن $X \neq \phi$ ١ و $\mathcal{A}$ صف من أجزاء $X$ ١. نقول عن الصف غير الخالي ١ $\mathcal{A}$ أنه يمثل جبراً على $X$ إذا تحققت الشروط ٤

1) $\phi, X \in \mathcal{A}$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \; , \; A \setminus B \in \mathcal{A}$.

الاجتماع — الفرق

3) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ ٤

4) $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B) \in \mathcal{A}$ ٤

5) $A \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A} \Rightarrow X - A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ ٤

وهـ.م.