الجمهورية العربية السورية
وزارة التعليم العالي- جامعة دمشق
كلية العلوم - قسم الرياضيات

اختبار الفصل الثاني
السنة الثالثة: رياضيات
المادة: تحليل 5

التاريخ:
الوقت:
الاسم:

السؤال الأول(35 درجة): جد التغير الكلي لكل من الدوال الآتية **مع الرسم**:

$$f(x)=x^2-4x:\ x\in[0,6]\quad,\quad f(x)=|x-2|:x\in[0,6]\quad,\quad f(x)=\begin{cases}x-1 & 0\le x<3\\ 10 & x=3\\ x^2 & 3<x\le 4\end{cases}$$

السؤال الثاني(25 درجة): احسب تكامل استيلجس لكل من الدوال الآتية **مع رسم** $g(x)$:

1. $\int_0^4 (x^2+1)dg(x):\ g(x)=[x];$ ثم استنتج $\Rightarrow \int_0^4 g(x)d(x^2+1):\ g(x)=[x]$
2. $\int_0^6 (x^2+1)dg(x):\ g(x)=\begin{cases}x+1 & 0\le x\le 2\\ x+2 & 2<x<4\\ x+3 & 4\le x\le 6\end{cases}$

السؤال الثالث(14 درجة): إذا كانت f دالة معرفة على $[0,2]$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}3 & x\in Q\\ -3 & x\notin Q\end{cases}$$ والمطلوب:

1. ارسم الدالة f وبيّن أنها محدودة. ثم بين أن $|f|$ دالة ذات تغير محدود.
2. أثبت أن f دالة ليست ذات تغير محدود.

السؤال الرابع(26 درجة): عرف تكامل ريمان للدالة f على المجال [a,b]، وتكامل لوبيغ للدالة البسيطة f على فضاء القياس (Ω,A,μ) ، ثم احسب كلا من التكاملين (من التعريف):

$$I=\int_0^3 x^2dx\quad,\quad J=\int_{[0,3.5]} sign(\cos\pi x)d\mu\quad:sign(\cos\pi x)=\begin{cases}1 & \cos\pi x>0\\ 0 & \cos\pi x=0\\ -1 & \cos\pi x<0\end{cases}$$

انتهت الأسئلة

مع دعائي لكم بالنجاح والتوفيق

د. نايف طلي

CamScanner

سلّم تصحيح تحليل ٥

سؤال الوحدة :

(1) $y = f(x) = x^2 - 4x \quad ; x \in [0, 6]$

$y' = 2x - 4 \quad ; \quad y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = -4$

x	0		2		6
y'	—	—	0	+	+
y	0 ↘	متناقص	-4 (ق)	متزايد	↗ 12

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$

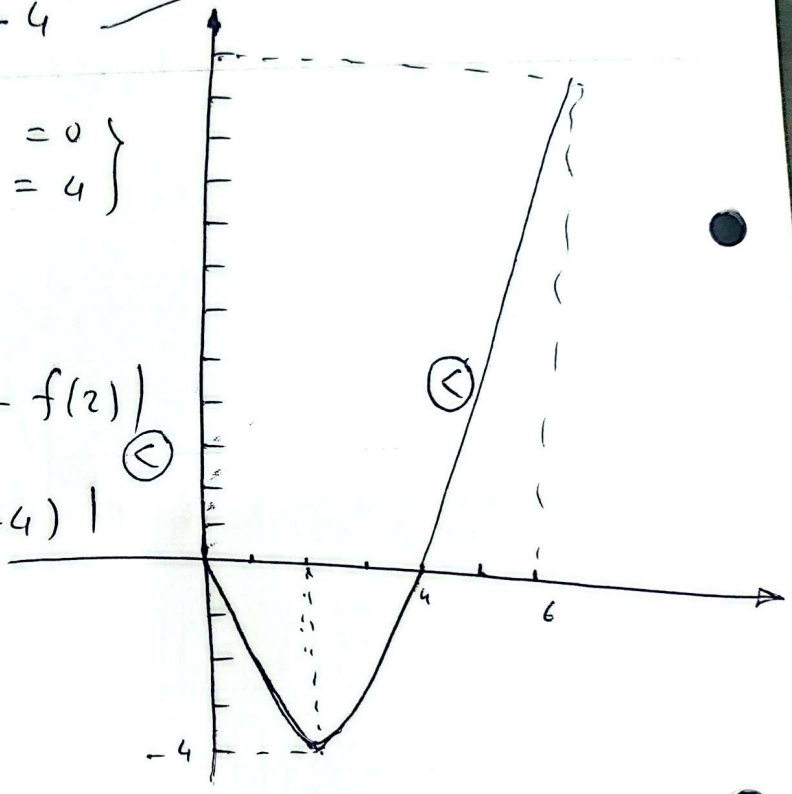
$x(x-4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

$\bigvee_0^6 f = \bigvee_0^2 f + \bigvee_2^6 f$ (ح)

$= |f(2) - f(0)| + |f(6) - f(2)|$ (ح)

$= |-4 - 0| + |12 - (-4)|$ (ح)

$= 4 + 16 = 20$ (1)



---

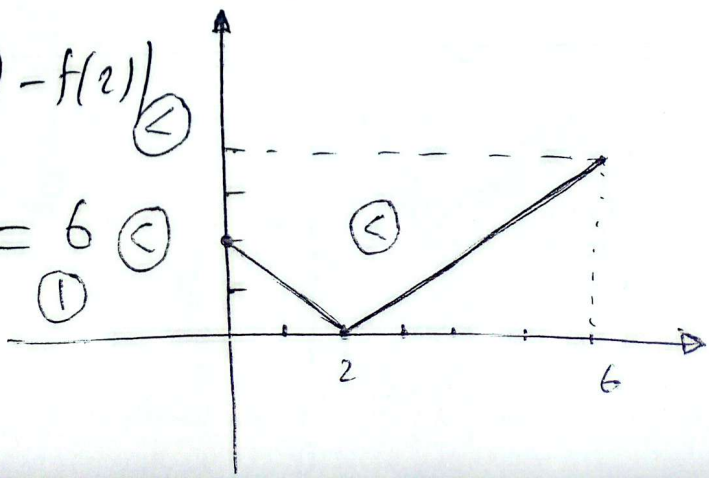
(2) $y = f(x) = |x - 2| \quad ; x \in [0, 6]$

$\bigvee_0^6 f = \bigvee_0^2 f + \bigvee_2^6 f$ (ح) $= \begin{cases} x - 2 & x > 2 \\ -x + 2 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$ متزايد / متناقص

$= |f(2) - f(0)| + |f(6) - f(2)|$ (ح)

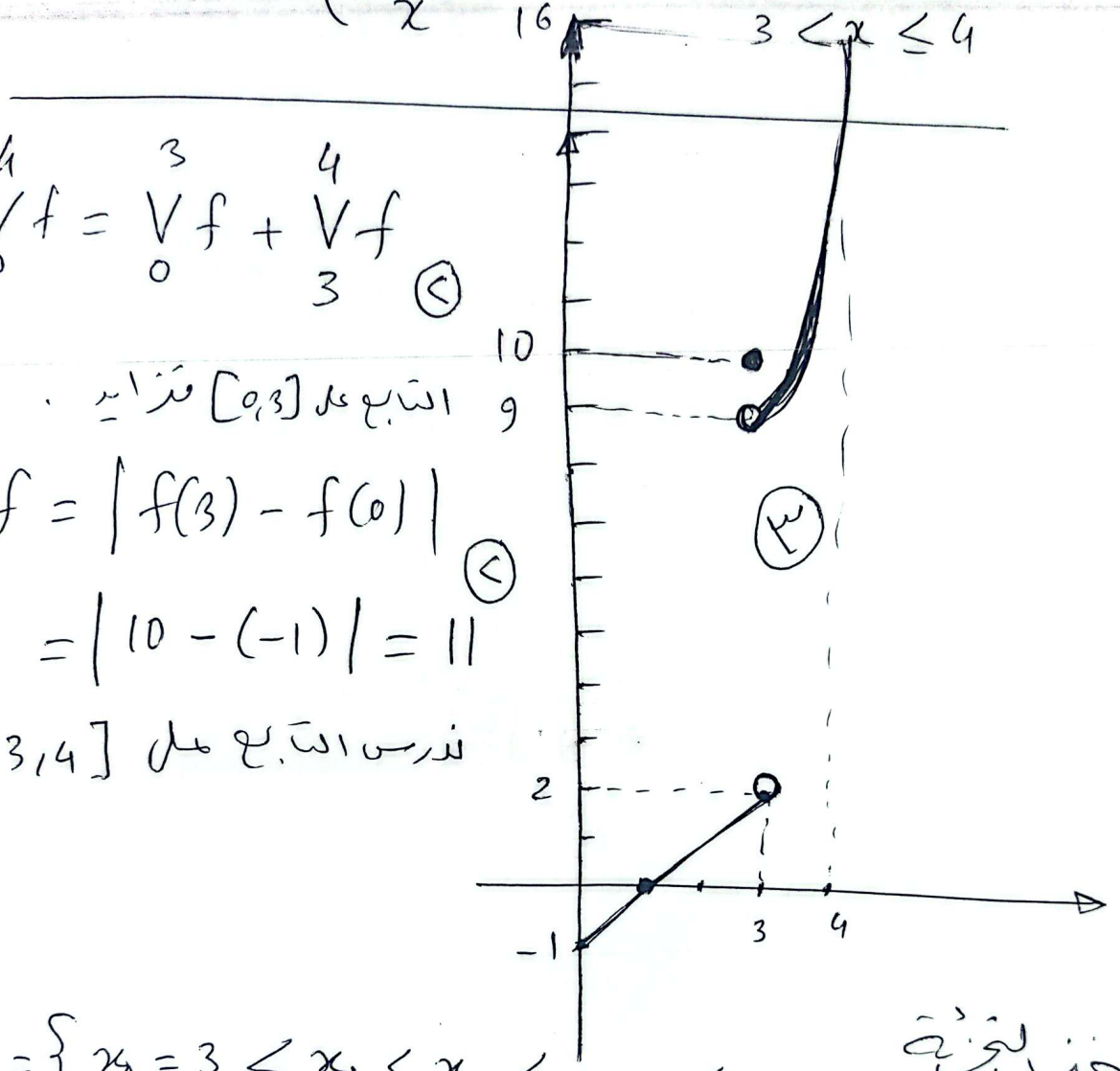
$= |0 - 2| + |4 - 0| = 6$ (ح)

(1)



c/

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \le x < 3 \\ 10 & x = 3 \\ x^2 & 3 < x \le 4 \end{cases}$$



$$\bigvee_0^4 f = \bigvee_0^3 f + \bigvee_3^4 f$$ ⟸ (c)

الدالة f على [0,3] متزايدة.

$$\bigvee_0^3 f = |f(3) - f(0)|$$ ⟸ (c)

$$= |10 - (-1)| = 11$$

ندرس الدالة f على [3,4].

(4)

لتكن $P = \{x_0 = 3 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 4\}$ ① من

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |\dots| + \dots$$

$$\overset{(c)}{+} |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1^2 - 10| + |x_2^2 - x_1^2| + |x_3^2 - x_2^2| + \dots$$

$$+ |x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2| + |x_n^2 - x_{n-1}^2|$$

$$= 10 - x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 + x_3^2 - x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2 + x_n^2 - x_{n-1}^2$$

$$V(f,P) = 26 - 2x_1^2 \overset{(c)}{\Rightarrow} \bigvee_3^4 f = \sup_P (26 - 2x_1^2) = 8 \overset{(c)}{\Rightarrow} \bigvee_0^4 f = 19$$

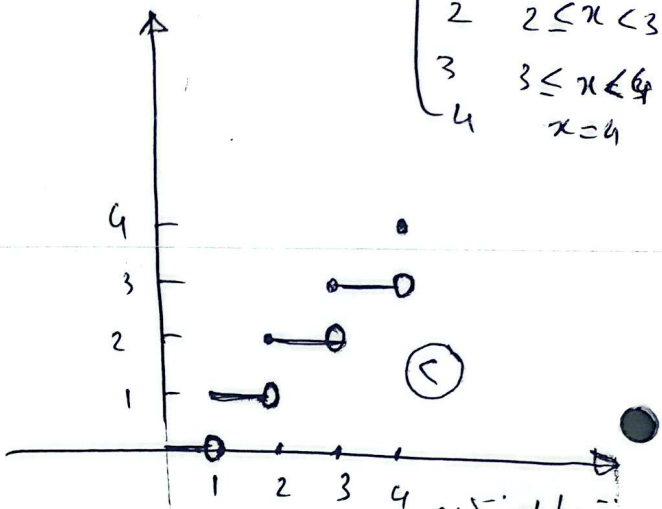
$$I = \int_0^4 (x^2+1)\, d\,g(x) \quad : g(x) = [x]$$

$$\Rightarrow J = \int_0^4 g(x)\, d(x^2+1) \quad : g(x) = [x]$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = [x]$$

$$g(x) = [x] = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ 3 & 3 \le x < 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$$



نقاط انقطاع: $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 4$

$$I = f(1)\cdot g_1 + f(2)\cdot g_2 + f(3)\cdot g_3 + f(4)\cdot g_4$$

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = 1$$

$$I = 2(1) + 5(1) + 10(1) + 17(1)$$

$$I = 34$$

$$J = \int_0^4 [x]\, d(x^2+1) = \left[(x^2+1)[x]\right]_0^4 - 34$$

$$= [(17)(4)] - 34$$

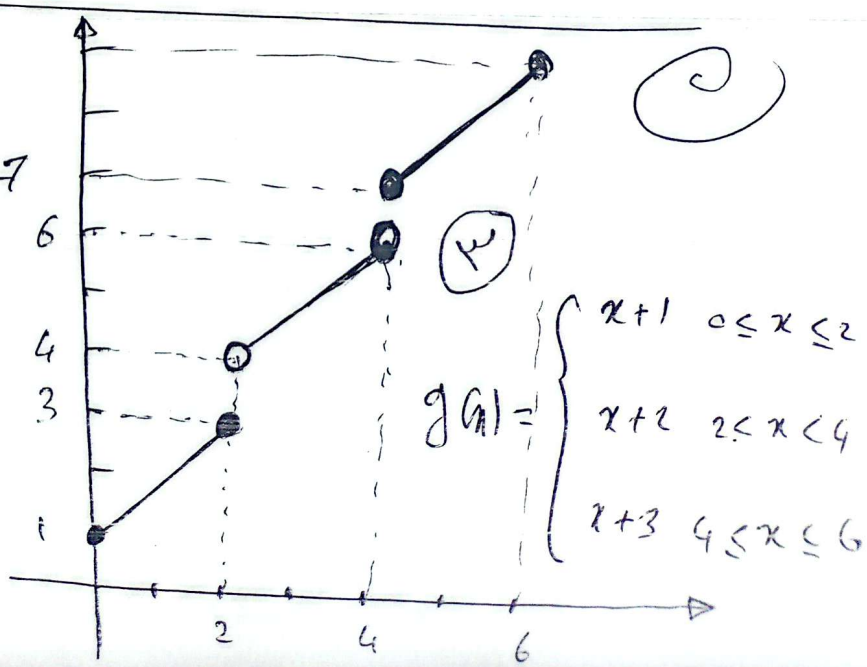
$$= 68 - 34 = 34$$

نقاط انقطاع:

$c_1 = 2$

$c_2 = 4$

$f(x) = (x^2+1)$



$$g(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \le x \le 2 \\ x+2 & 2 < x < 4 \\ x+3 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

٤/

$$I = \int_0^2 (x^2+1)(1)\,dx + \int_2^4 (x^2+1)(1)\,dx + \int_4^6 (x^2+1)(1)\,dx$$

$$+ f(2)\left[g(2+0) - g(2-0)\right] + f(4)\left[g(4+0) - g(4-0)\right]$$

$$I = \int_0^6 (x^2+1)\,dx + 5[4-3] + 17[7-6] \quad (٢)$$

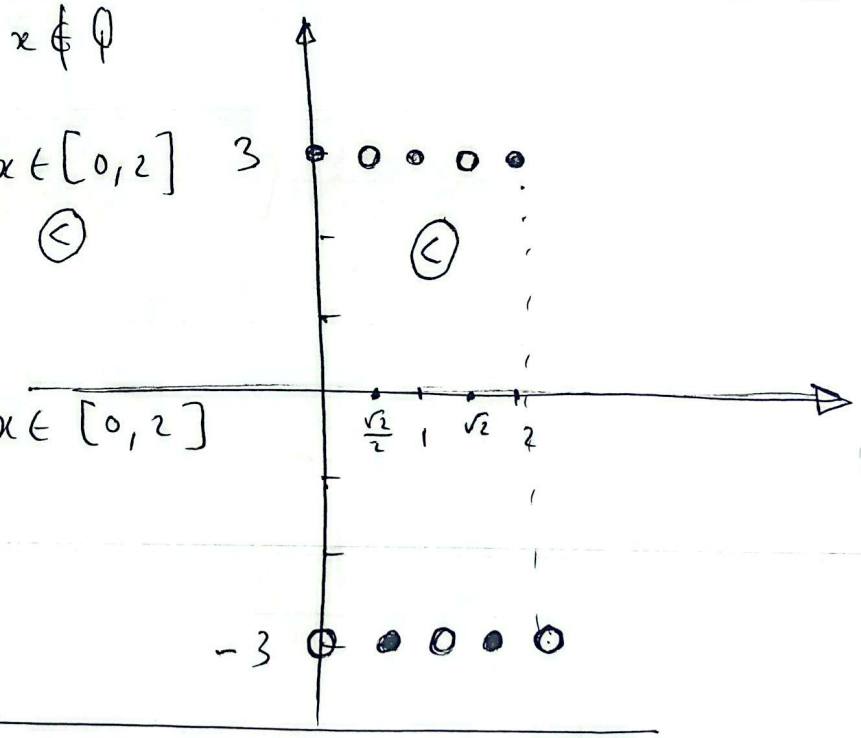
$$I = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^6 (1) + 22 = \frac{(6)(6)(6)}{3} + 6 + 22$$

$$I = 72 + 28 = 100 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 2 \\ \hline 72 \end{array} \quad 1$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{Q} \\ -3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad ; x \in [0,2]$$



$|f(x)| \leq 3 \;, \forall x \in [0,2]$ (ج)

محدود δ

$|f(x)| = 3 \quad ; x \in [0,2]$

دالة ثابتة

$\bigvee_0^2 |f| = 0$ (ج)

$\bigvee_0^2 f = ?$

$P = \{ x_0 = 0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = 2 \}$ تجزئة

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$ (ج)

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |-3-3| + |3-(-3)| + \cdots + |3-(-3)| \quad (ج)$$

$$V(f/P) = \underbrace{6+6+6\cdots+6}_{n} = 6n$$

$$\bigvee_0^2 f = \sup_P (6n) = \lim_{n\to\infty}(6n) = +\infty$$

تعريف التكامل ريمان:

إذا كانت f دالة معرفة ومحدودة على $[a,b]$. نأخذ التجزئة

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

نأخذ مجموع

$$S(f/P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta x_k$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$x_{k-1} \le t_k \le x_k$$

نقول عن f أنها قابلة للمكاملة وتكامل ريمان على $[a,b]$ إذا وجد $A\in\mathbb{R}$

$$A = \lim_{\Delta x\to 0} S(f/P)$$

حيث: $\Delta x = \max(\Delta x_k)$, $1\le k\le n$

$$I = \int_0^3 x^2\,dx$$

$$[0,3] \longrightarrow \Delta x = \frac{3-0}{n} \quad ; \quad \Delta x\to 0,\ n\to\infty$$

$x_0 = 0$

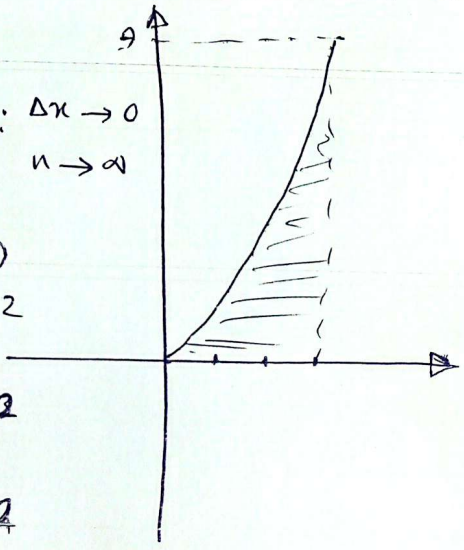
$x_1 = 0 + \frac{3}{n} \Rightarrow f(x_1) = \left(\frac{3}{n}\right)^2$

$x_2 = 0 + \frac{3}{n}(2) \Rightarrow f(x_2) = \left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot(2)^2$

$x_3 = 0 + \frac{3}{n}(3) \Rightarrow f(x_3) = \left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot(3)^2$

$\vdots$

$x_n = 0 + \frac{3}{n}(n) \Rightarrow f(x_n) = \left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot n^2$



7/

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot 2^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot 3^2 + \dots + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot n^2\right] \quad ⑤$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 \left[1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \quad ⑤ = \lim_{n\to\infty} \frac{27(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27\, n^3}{6\, n^3} = 9 \quad ⑤$$

تكامل لوبيغ للدالة f على فضاء قياسي $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

تقوم على الدالة f (البسيطة) التي قابلة للمكاملة على Ω بالنسبة للقياس μ إذا تحقق

$$\int_{\Omega} f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \mu(A_i) \quad ⑤$$

حيث ① c_i قيم الدالة f.

$\hat{\bigcup}_{i=1} A_i = \Omega$ ⑤ حيث A_i تمثل تجزئة لـ Ω

$A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$

$A_i = \{x \in \Omega : f(x) = c_i\}$ ؛

$$\cos \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

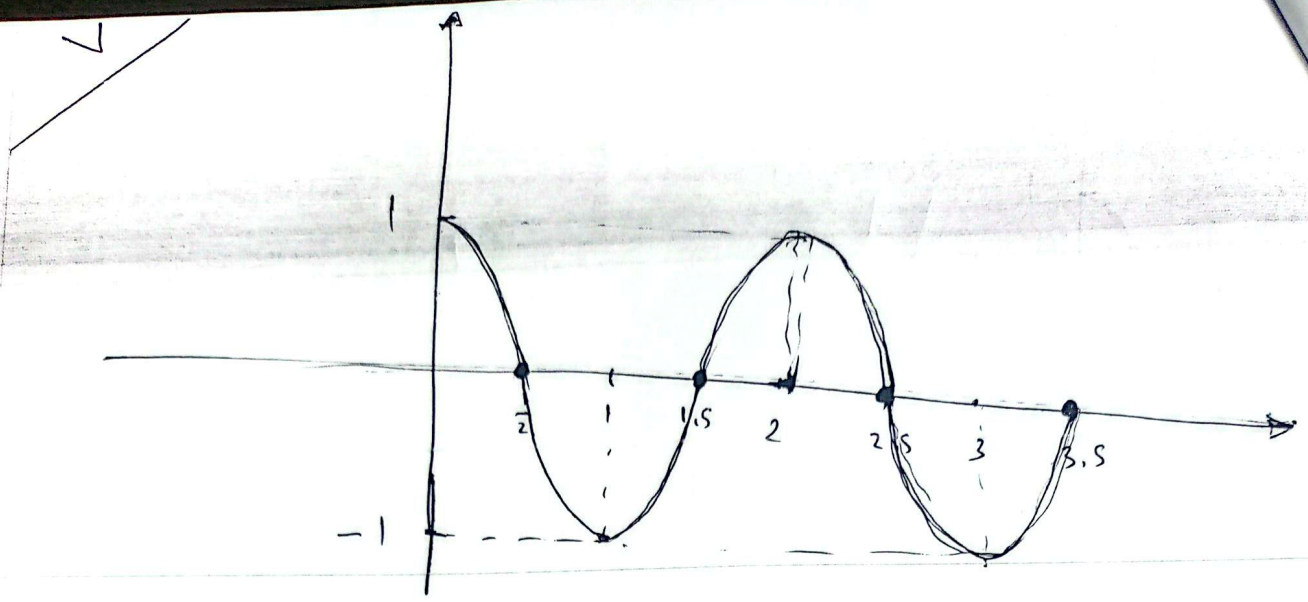
$$x = \frac{1}{2} + k \quad : \quad k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$k = 1 \Rightarrow x = 3/2 = 1.5$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3.5$



$$J = \int_{[0,3.5]} \operatorname{sign}(\cos \pi x)\, d\mu = 1\,\mu(A_1) + 0\,\mu(A_2) + (-1)\,\mu(A_3)$$

حيث A_1 مجموعة قيم x التي تجعل $\cos \pi x > 0$

$\cos \pi x = 0$: : : : : A_2

$\cos \pi x < 0$: : : : : A_3

$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, 1.5, 2.5, 3.5 \right\} \Rightarrow \mu(A_2) = 0$$

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]1.5, 2.5\right[\Rightarrow \mu(A_1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$A_3 = \left]\frac{1}{2}, 1.5\right[\cup \left]2.5, 3.5\right[\Rightarrow \mu(A_3) = 1 + 1 = 2$$

$$J = 1\left(\frac{3}{2}\right) + 0 - 1\,(2) = -\frac{1}{2}$$

د. ع