مادة مشترك
سهى أحمد هابيل و
سهى بشر هابيل

جامعة دمشق

كلية العلوم

السنة الرابعة

المدة: ساعتان

امتحان الفصل الثاني – رياضيات(تحليل) – تبولوجيا٢ – 2025/7/28 – 11,30- 13,30

السؤال الأول: 15 درجة

ما تعريف التبولوجيا على مجموعة ؟

عيّن جميع التبولوجيات الممكنة المعرّفة على مجموعة قواسم العدد الاولي 1447.

هل صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هو تبولوجيا عليها؟ برّر.

السؤال الثاني: 15 درجة

عرّف المرشّحة الاعظمية وبيّن أن كل مرشّحة أعظمية في فضاء متراص تكون متقاربة.

السؤال الثالث: 20 درجة

أثبت ان الفضاء المتري هو فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى، ثم

أثبت أن مجموعة الاعداد الصحيحة ليست مترابطة في $\mathbb{R}$.

السؤال الرابع: عرّف الكلمات التالية: 15 درجة

المبسَّط من البعد $-\ m$ ، الزمرة التبديلية الحرة $C_m(K)$ ، الطريق الصفري.

السؤال الخامس: 20 درجة

أثبت صحة التمهيدية التالية:

تمهيدية: ليكن $f: C \longrightarrow C'$ تابع السلسلة، عندئذ يكون $f_n(B_n) \subseteq B'_n, f_n(Z_n) \subseteq Z'_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

السؤال السادس: 10 درجة

احسب الزمرة الأساسية $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$.

السؤال السابع : 5 درجات

بفرض أن α, β طريقان على سطح الكرة الواحدية S^2 يبدآن في

$x_0 = (+1,0,0)$ وينتهيان في $x_1 = (-1,0,0)$ برهن أن $\alpha \sim \beta(rel\{0,1\})$.

نهاية الأسئلة

سلم تصحيح ... توبولوجيا (2) للسنة الرابعة رياضيات تحليل (28/7/2025 ، ١١,٣٠ - ١٣,٣٠

السؤال الرابع : عرف الكلمات التالية : (15 درجة)

المبسط في البعد - m :

هو المجموعة التالية :

$$\left\{ x = \sum_{\alpha=0}^{m} t_\alpha P_\alpha : \sum_{\alpha=0}^{m} t_\alpha = 1 \, , \, 0 \leq t_\alpha \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \, , \, m \leq n$$ حيث $0 < m$

ونرمز لها σ^m .

وفي حال $m=0$ فإن σ^0 هو مبسط في البعد صفر وهو نقطة $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

الزمرة التبديلية الحرة $C_m(K)$:

هي الزمرة التبديلية الحرة المولدة بالمبسطات في المركب المبسط K من البعد m ونرمز لها بـ $C_m(K)$:

في حال كون $l < m$ حيث l هو بعد K فإن $C_m(K) = \{0\}$

كذلك في $0 \leq m \leq l$ فإن

$C_m(K) = \left\{ x = \sum_i m_i \sigma_i^m : m_i \in \mathbb{Z} \right.$ ، المجموع منته $\}$

أي الأعداد الصحيحة m_i كلها أصفار باستثناء عدد منته .

الطريق الصفري :

هو الطريق $\alpha : I \longrightarrow X$ حيث $\forall t \in I ; \alpha(t) = x_0$.

السؤال الخامس (20 درجة)

أثبت صحة التمهيدية التالية :

تمهيدية : ليكن $f : C \longrightarrow C'$ تابع السلسلة عندئذ يكون $f(Z_n) \subseteq Z'_n$ ، $f(B_n) \subseteq B'_n$

مهما يكن $n \in \mathbb{Z}$.

البرهان : نعلم أن f هو سلسلة من التشاكلات $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ بحيث

يكون المخطط التالي تبديليا

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & {} \\
\arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

أي لدينا لكل $n \in \mathbb{Z}$

$$f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$$

ولدينا $Z_n = Ker\,\partial_n$ و $B_n = Im\,\partial_{n+1}$ ، $Z'_n = Ker\,\partial'_n$ ، $B'_n = Im\,\partial'_{n+1}$

برهان $f_n(Z_n)\subseteq Z'_n$

فنفرض $x\in Z_n$ و $\partial_n x = 0$ وبالتالي باعتبار أن

$$f_{n-1}\circ\partial_n = \partial'_n\circ f_n \Rightarrow 0 = f_{n-1}(0) = f_{n-1}(\partial_n x)$$

$$= (f_{n-1}\circ\partial_n)x$$

$$0 = (\partial'_n\circ f_n)(x)$$

$$0 = \partial'_n(f_n(x))$$

ومنه $f_n(x)\in Z'_n = Ker\,\partial'_n$ اذن $f_n(Z_n)\subseteq Z'_n$

كذلك بفرض $y\in B_n = Im\,\partial_{n+1}$ اذن يوجد $x\in C_{n+1}$ بحيث $y=\partial_{n+1}x$

ولدينا $f_n\circ\partial_{n+1} = \partial'_{n+1}\circ f_{n+1}$ وبالتالي

$$(f_n\circ\partial_{n+1})(x) = (\partial'_{n+1}\circ f_{n+1})x$$

$$\Rightarrow f_n(\partial_{n+1}x) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(x)) \Rightarrow f_n(y) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(x))\in B'_n$$

اذن

$$f_n(B_n)\subseteq B'_n .$$

السؤال السادس (10 درجات)

احسب الزمرة الأساسية $\pi_1(\mathbb{R},0)$

الحل: ليكن $\alpha\in C_1(\mathbb{R},0)$ طريق مغلق يبدأ وينتهي في $x_0=0$

لاحظ أن $\alpha\sim 1\,(rel\{0,1\})$ حيث $1:I\to\mathbb{R}$ الطريق الصفري في $x_0=0$

أي $1(t)=0 \quad \forall t\in I$ وذلك لوجود الهوموتوبي F المستمر وضوحاً

$$F: I\times I\to\mathbb{R}$$

$$F(s,t) = t\alpha(s)$$

كما أن $F(s,0) = 0\cdot\alpha(s) = 0$ اذن

$$F(s,0) = 1(s) \quad \forall s\in I$$

$$F(s,1) = \alpha(s)$$

$$F(0,t) = t\alpha(0) = t\times 0 = 0 = \alpha(0)$$

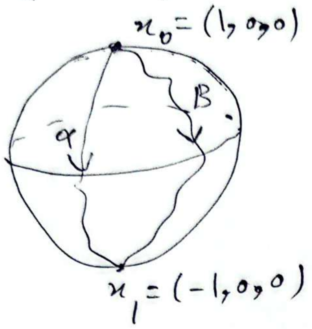
$$F(1,t) = t\alpha(1) = t\times 0 = 0 = \alpha(1)$$

لذا $[1]=[\alpha]$ مهما كان $\alpha\in C(\mathbb{R},0)$

اذن $\pi_1(\mathbb{R},0) = \{[1]\}$ الزمرة الصفرية .

السؤال السابع (5 درجات)

بفرض أن α و B طريقان على سطح الكرة الواحدية S^2 يبدآن في $x_0=(+1,0,0)$ وينتهيان في $x_1=(-1,0,0)$ برهن أن $\alpha\sim B\, rel\{0,1\}$.



الحل : رأينا أن $\pi_1(S^2,x_0)\approx\{[1]\}$ صفرية . ولاحظ أن الطريق

$\alpha\cdot B^{-1}$

هو طريق يبدأ في x_0 وينتهي في x_0

اذن $C_1(S^2,x_0)\ni\alpha\cdot B^{-1}$ ومنه

$\pi_1(S^2,x_0)\ni[\alpha\cdot B^{-1}]$

لذا $[1]=[\alpha\cdot B^{-1}]$ اذن

$\alpha\cdot B^{-1}\sim 1\, rel\{0,1\}$ ثم نستخدم مبرهنات سابقة

$\Rightarrow (\alpha\cdot B^{-1})\cdot B\sim 1\cdot B\, rel\{0,1\}$

$\Rightarrow \alpha\cdot(B^{-1}\cdot B)\sim 1\cdot B\, rel\{0,1\}\sim B\, rel\{0,1\}$

ولدينا $1_{x_1}\sim B^{-1}\cdot B\,(rel\{0,1\})$ ومنه

$\alpha\cdot 1_{x_1}\sim B\, rel\{0,1\}$

$\alpha\cdot 1_{x_1}\sim\alpha\, rel\{0,1\}$ ومنه

$\alpha\sim B\, rel\{0,1\}$

وهو المطلوب

1

الجزء الثاني

سلم تصحيح تبولوجيا (2) - امتحان 7/28/2025

للسنة الرابعة رياضيات (تحليل)

امتحان الفصل الثاني - قسم أ. د. بشير جابل

السؤال الأول (15 درجة)

ما تعريف التبولوجيا على مجموعة؟

اذا كانت X مجموعة غير خالية و كانت τ جماعة من أجزائها، نقول أن τ تبولوجيا على X اذا تحققت الشروط التالية:

1) $\emptyset, X \in \tau$, (2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ 5

3) $\{A_i : i \in I\} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

عيّن التبولوجيات الممكنة المعرّفة على مجموعة قواسم العدد الأولي 1447.

قواسم العدد 1447 هي $X = \{1, 1447\}$ والتبولوجيات على X هي 5

$\tau_1 = \{\emptyset, X\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, \{1447\}, X\}$

$\tau_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{1447\}, X\}$

هل صف المجالات المفتوحة في $\mathbb{R}$ تبولوجيا على $\mathbb{R}$؟ برّر.

الإجابة: لا. لأن صف المجالات المفتوحة يفشل في تحقيق الشرط الثالث من تعريف التبولوجيا فلو اخذنا $]1,2[$ ، $]3,4[$ مجالات مفتوحات في $\mathbb{R}$ فإن $]1,2[\cup]3,4[$ ليس مجالاً مفتوحاً في $\mathbb{R}$. 5

السؤال الثاني (15 درجة)

عرّف المرشحة الأعظمية وبيّن أن كل مرشحة أعظمية في فضاء متراص تكون متقاربة. 3

تعريف المرشحة الأعظمية على X:

نقول عن المرشحة λ أنها أعظمية اذا حققت الشرط التالي:

$\forall A \subseteq X : A \in \lambda$ أو $X \setminus A \in \lambda$

ونفرض أن (X, τ) فضاء تبولوجي متراص وأن λ مرشحة أعظمية على X

ولنبرهن أن λ متقاربة.

لنفرض جدلاً عدم صحة ذلك.

اذن من اجل $x \in X$ فإن $\lambda \not\to x$ وهذا يعني وجود جوار U_x لـ x بحيث $U_x \notin \lambda$ وبما أن λ مرشحة أعظمية اذن $X \setminus U_x \in \lambda$

وبما أن U_x جوار لـ x اذن هناك مجموعة مفتوحة O_x بحيث

$$x \in O_x \subseteq U_x$$

لدينا $\{O_x : x \in X\}$ تغطية مفتوحة لـ X أي $X = \bigcup_{x \in X} O_x$.

وبما أن X متراص اذن يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية مثل $\{O_{x_1}, \dots, O_{x_n}\}$

اذن $X = O_{x_1} \cup \dots \cup O_{x_n}$ ومنه نجد أن

$$\phi = X^c = (X \setminus O_{x_1}) \cap \dots \cap (X \setminus O_{x_n})$$

وبما أن $O_{x_i} \subseteq U_{x_i}$ اذن $\lambda \ni X \setminus U_{x_i} \subseteq X \setminus O_{x_i}$

$$\lambda \supseteq \{X \setminus O_{x_1}, \dots, X \setminus O_{x_n}\}$$

12 ومنه $\phi = (X \setminus O_{x_1}) \cap \dots \cap (X \setminus O_{x_n}) \in \lambda$ لكن هذا يناقض تعريف المرشحة.

اذن λ متقاربة.

السؤال الثالث (20 درجة)

أثبت أن الفضاء المتري هو فضاء يتمتع بقابلية العد الأولى ثم أثبت أن مجموعة الأعداد الصحيحة ليست مترابطة في $\mathbb{R}$

الإجابة:

ليكن (X,d) فضاء متري. 15

أن X يتمتع بقابلية العد الأولى الآن جملة الجوارات الأساسية

$\{N_x : x \in X\}$ و $N_x = \{N(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ (مجموعة الكرات المفتوحة التي أنصاف أقطارها $\frac{1}{n}$) هي جملة جوارات أساسية لتبولوجيا (X,d) كما أن N_x قابلة للعد

وهي جملة جوارات أساسية لأنه اذا كانت U مفتوحة في X وكان $x \in U$ فيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث $N(x, \varepsilon) \subseteq U$

وباختيار n كبير كفاية بحيث $\frac{1}{n} < \varepsilon$ نجد

$$N(x, \tfrac{1}{n}) \subseteq N(x, \varepsilon) \subseteq U$$

اذن $N_x \ni N(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$.

اذن (X, d) يحقق بقابلية العد الأولى .

$\mathbb{Z}$ غير مترابطة في $\mathbb{R}$ لوجود المجموعتين المفتوحتين في $\mathbb{R}$

$$U =]-\infty, \tfrac{1}{2}[\ , \ V =]\tfrac{1}{2}, +\infty[$$

5

وحيث

$$\mathbb{Z} \subseteq U \cup V \quad (\tfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{Z} \cap U \neq \emptyset \neq \mathbb{Z} \cap V$$

$$\mathbb{Z} \cap U \cap V = \emptyset$$

نهاية سلم تصحيح

أسئلة أ. د بشير قابيل