سلم تصحيح

الجمهورية العربية السورية

جامعة دمشق

كلية العلوم – قسم الرياضيات

اسم الطالب:

المـــــــدة: ساعتان

<u>يمنع استخدام الآلة الحاسبة</u>

<u>امتحان مقرر هندسة تفاضلية لطلاب السنة الرابعة رياضيات - فصل أول 2024-2025</u>

السؤال الأول (30درجة): عرف التكافؤ بين تمثيلين ثم أثبت أنّ التمثيلين المتكافئين يزودان المجموعة النقطية لهما بالتوجيه ذاته.

السؤال الثاني (60درجة): ليكن L منحنياً ممثلاً بالدالة المتجهيّة المعرّفة بالمساواة:

$$\vec{r}(t) = (2(1-\cos t), 2(t-\sin t), 0) : -\infty < t < \infty$$

والمطلوب:

1. إلى أي صف ينتمي المنحني L ؟ أثبت أنّ $L_1 = \overrightarrow{r}([0,\pi])$ قوس بسيط. ثم احسب طول هذا القوس.
2. عيّن النقاط الشاذة لـ L في التمثيل $\vec{r}$، ثم بيّن نوعها.
3. عيّن عند النقطة p_0 **الموافقة لـ $t=0$**: ثلاثية فرنييه، ~~التقوس~~، الالتفاف، المستقيم المماس، المستوي الملاصق، و~~دائرة~~ التقوس.

السؤال الثالث (10 درجة):

أثبت وجود دالة غامرة ومستمرّة ومتزايدة تماماً للفترة $[a,b]$ على $[0,1]$.

***** انتهت الأسئلة *****

**** مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح****

جامعة دمشق كلية العلوم

٢٤ تموز ٢٠٢٥

الامتحانات

سلم تصحيح مقرر الهندسة التفاضلية لطلاب السنة الرابعة رياضيات

فصل ثاني 2024 - 2025

السؤال الأول: /10 درجات للتعريف و 20 درجة للتمرين/

* نقول عن تطبيقين $\vec{r}_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ، $\vec{r}_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ إنهما متكافئان إذا وجدت دالة $\phi : I_2 \longrightarrow I_1$ غامرة و مستمرة و متزايدة تماماً تجعل المخطط التالي تبديلياً أي $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \circ \phi$

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[r, "\vec{r}_1"] & \mathbb{R}^3 \\ I_2 \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "\vec{r}_2"'] & \end{tikzcd}$$

* نفرض أن رأس المتجه $\vec{r}_2(\tau_1)$ يأتي قبل رأس المتجه $\vec{r}_2(\tau_2)$ في المجموعة النقطية المرتبة بواسطة $\vec{r}_2$ وهذا يعني أن $\tau_1 < \tau_2$ لأجل τ_1 و τ_2 من I_2

ولكن t_1 و t_2 من I_1 بحيث $t_1 = \phi(\tau_1)$ و $t_2 = \phi(\tau_2)$ وكما نعلم أن τ_1, t_1 يعينان النقطة ذاتها في المجموعة النقطية المشتركة

t_2 τ_2 " " " " " " " "

بما أن $\tau_1 < \tau_2$ وبما أن ϕ متزايدة تماماً فإن $\phi(\tau_1) < \phi(\tau_2)$ وبالتالي $t_1 < t_2$

وهذا يعني أن رأس المتجه $\vec{r}_1(t_1)$ يأتي قبل رأس المتجه $\vec{r}_1(t_2)$ في المجموعة النقطية المرتبة بواسطة $\vec{r}_1$ وبالتالي فإن $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ يزودان المجموعة النقطية المشتركة بالترتيب ذاته.

السؤال الثاني (60 درجة) (الطلب الأول $10+\cancel{6}5+\cancel{5}5$) (الطلب الثاني $\cancel{5}5+\cancel{7}5$) (الطلب الثالث مفاهيم الحل)

لا ينتمي المنحني L إلى الصنف C^{∞} بل هو تحليلي لوجود التمثيل المسموح به $\vec{r}$ وهو من الصنف C^{∞}

نعم، يمثل قوس بسيط لأن $\vec{r}$ متباين ومستمر على مجال مغلق حيث

$x(t) = 2(1-\cos t)$ و $x'(t) = 2\sin t > 0$ على المجال $]0,\pi[$ ، وهو مستمر على المجال $[0,\pi]$

وبالتالي $x(t)$ متزايد تماماً على المجال $[0,\pi]$ فهو متباين على $[0,\pi]$ /10 درجات/

* $\vec{r}\,'(t) = (2\sin t, 2(1-\cos t), 0)$

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4(1-2\cos t+\cos^2 t)} = \sqrt{8-8\cos t}$

$= \sqrt{8}\,(1-\cos t) = 2\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|$

لكن $0 < t < \pi$ وبالتالي $0 < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\frac{t}{2} > 0$

$l = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = \cancel{8}4\sqrt{2}$ /10 درجات/

* النقاط الشاذة: بما أن المنحني تحليلي فالنقاط الشاذة إن وجدت هي النقاط الموافقة لحلول المعادلة

$\vec{r}\,'(t_k) = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} 2\sin t_k = 0 \Rightarrow t_k = \pi k \\ 2(1-\cos t_k) = 0 \Rightarrow t_k = 2\pi k \end{array}\right\} \Longrightarrow t_k = 2\pi k \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$P_k = \vec{r}(2\pi k) = (0, 2(2\pi k), 0) = (0, 4\pi k, 0)$

$\vec{r}''(t) = 2(\cos t, \sin t, 0)$

$r''(t_k) = (2, 0, 0) \neq 0$

وبالتالي فإن مرتبة أول مشتق غير معدوم زوجية والنقطة P_k نقطة أساسية

3. بما أن $\vec{r}(0) = (0,0,0)$ فإن:

5 $\vec{t} = \dfrac{\vec{r}''(0)}{\|r''(0)\|} = \dfrac{(2,0,0)}{2} = (1,0,0)$.

$\vec{b} = \dfrac{\vec{r}''(0) \wedge \vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}''(0) \wedge \vec{r}'''(0)\|}$

$\vec{r}'''(t) = 2(-\sin t, \cos t, 0) \Rightarrow \vec{r}'''(0) = (0, 2, 0)$

5 $\vec{r}''(0) \wedge \vec{r}'''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 4)$

$\Rightarrow \vec{b} = \dfrac{(0,0,4)}{4} = (0, 0, 1)$

5 $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 0)$

ملاحظة: (لو كتبت الطالب الرسم في حالة نقطة نظامية ولم ينتبه أنها غير نظامية نعطي درجة $\vec{b}$ و $\vec{t}$ $3+3+\frac{1}{3}$ ~~للاتجاه~~ وهو لا يحاسب الطالب على التقوس ولا على دائرة التقوس)

* بما أن $z(t) = 0$ لأجل كل $t \in \mathbb{R}$ فالمنحني واقع في المستوي

10 $z = 0$ وبالتالي أنه مستوي الالتفاف oxy

فالمستوي الملاصق هو oxy.

ويمكن تعيين المستوي الملاصق: $[\vec{P_0Q}, \vec{r}''(0), \vec{r}'''(0)] = 0$

$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + 4z = 0 \Rightarrow$

$z = 0$

أي هو المستوي oxy

5 معادلة المستقيم المماس: $\vec{R}(u) = \vec{r}(0) + u\,\vec{r}''(0)$

$= (0,0,0) + u(2,0,0) = (2u, 0, 0)$

السؤال الثالث / ١٥ درجات /

لنأخذ الدالة $\phi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ وهي دالة مستمرة ومتزايدة تماماً تماماً إذاً هي تقابل

$t \longmapsto (1-t)a + tb = (b-a)t + a$ فلذا تقابل عكسي له نفس صيغة المطلوب، ولكن $h = \phi^{-1}$

نلاحظ أن

$$u = (b-a)t + a \Rightarrow u - a = (b-a)t \Rightarrow t = \frac{u-a}{b-a} = h(u)$$

فتصبح الدالة h كالتالي

$$h : [a,b] \longrightarrow [0,1]$$

$$u \longmapsto \frac{u-a}{b-a}$$

وهي دالة مستمرة ومتزايدة تماماً وتقابل.