سلم تصحيح

جامعة دمشق – كلية العلوم امتحان تحليل عقدي(2) + تحليل 7 الفصل الثاني 2025-2024

قسم الرياضيات السنة الثالثة (رياضيات) المدة : ساعتان

السؤال الأول: (16 درجة)

هل يوجد تابع تحليلي على C يقبل التابع $u(x,y)=x^3-3xy^2$ جزء حقيقيا له؟ وفي حال الإيجاب عينه.

السؤال الثاني: (18 درجة)

عين مجموعة تحليلية التابع $f(z)=\dfrac{\tan z}{(\cos z-i)}$.

السؤال الثالث: (26 درجة)

احسب التكاملين $\int_{oA\oplus AB}\operatorname{Im} z\,dz$ ، $\int_{oB}\operatorname{Im} z\,dz$ حيث o مبدأ الإحداثيات و A النقطة الممثلة للعدد العقدي $1+i$ و B النقطة الممثلة للعدد العقدي $2+i$. استفد مما سبق في بيان فيما كان تكامل التابع $f(z)=\operatorname{Im} z$ مستقلا عن الطريق المسلوك وفيما كان للتابع $f(z)=\operatorname{Im} z$ تابع أصلي على C أم لا. علل إجاباتك. أخيرا، هل يصلح التابع $f(z)=\operatorname{Im} z$ كمثال يبين خطأ الدعوى:

"استمرارية تابع عقدي على منطقة كافٍ لوجود تابع أصلي لذلك التابع على تلك المنطقة".

السؤال الرابع : (20 درجة)

عين صورة القطعة المستقيمة $S=\{z=iy:0\le y\le\pi\}$ وفق التابع e^z، ثم عين وارسم صورة المستطيل الذي رؤوسه $z_1=0$ ، $z_2=1$ ، $z_3=1+i\pi$ ، $z_4=i\pi$ وفق e^z.

السؤال السادس : (20 درجة)

احسب التكامل $\int_{\Gamma_j}\dfrac{\cos z}{z^2(z-i)}dz$ حيث $j=1,2,3,4$، و:

1. $\Gamma_1=c^+(0,\frac{1}{2})$ ، 2. $\Gamma_2=c^+(i,\frac{1}{4})$ ، 3. $\Gamma_3=c^+(-3i,2)$ ، 4. $\Gamma_4=c^+(0,2)$ ،

5. $\Gamma_5=c^-(1+\frac{2i}{3},\frac{\sqrt{11}}{3})$

انتهت الأسئلة

(ص 1)

سلم تصحيح امتحان التحليل الحقيقي (ت)
سنة ثالثة رياضيات - فصل ثاني 2024-2025

إجابة السؤال الأول: (ستة عشر درجة)

إنّ $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ، $u_x = 6x$ ، $u_{xx} = 6$ ، $u_y = -6xy$ ، $u_{yy} = -6x$.

و منه u من الصنف C_2 على $\mathbb{R}^2$ (لأنها متعددات حدودية، لها مشتقات جزئية من جميع الرتب، لأنها معرفة على $\mathbb{R}^2$ كله).

بما أنّ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x - 6x = 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

فإنّ u توافقي على $\mathbb{R}^2$ و يوجد تابع تحليلي f يقبل u جزء حقيقياً له.

لأجل أنه يكون u جزء حقيقياً لتابع تحليل $f = u + iv$ يجب أن تحقق v المعادلتين:

$$\begin{cases} v_x = -u_y = 6xy & (1) \\ v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 & (2) \end{cases}$$

من (1) نجد: $v = \int 6xy\,dx = 3x^2y + g(y)$

ومنه: $v_y = 3x^2 + \frac{dg}{dy}$ (3)

بمقارنة (2) و (3) نجد:

$\frac{dg}{dy} = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3 + c$

$v = 3x^2y - y^3 + c$ ،

والتابع التحليلي $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + c)$

ملاحظة: تعطى العلامة كاملة لمن أوجد التابع بشكل صحيح (ولم ينسى الثابت c)

إجابة السؤال الثاني: (ثماني عشر درجة)

مجموعة تحليلية التابع $\tan z$ هي $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ، مجموعة تحليلية التابع f هي أيضاً $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ومجموعة تحليلية التابع $\frac{f}{\tan z}$ هي $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ لأن البسط والمقام

تمرين

6) أصفار المقام هي حلول المعادلة: $\cos z - i = 0$

$\cos z - i = 0 \Leftrightarrow \cos z = i \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2i$

$\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2i e^{iz} + 1 = 0$

$\Delta = (-2i)^2 - 4 = -8$

$\delta = 2\sqrt{2}i$ جذر تربيعي لـ Δ، ومنه:

$e^{iz} = \frac{2i - 2\sqrt{2}i}{2} = (1-\sqrt{2})i$ (1)

$e^{iz} = \frac{2i + 2\sqrt{2}i}{2} = (1+\sqrt{2})i$ (2)

7) (1) $\Leftrightarrow e^{ix-y} = [(\sqrt{2}-1), -\frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow [e^{-y}, x] = [\sqrt{2}-1, -\frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow y = -\ln(\sqrt{2}-1) \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow z_k = (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) - i\ln(\sqrt{2}-1), \; k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة (1)

(2) $\Leftrightarrow e^{ix-y} = [1+\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow [e^{-y}, x] = [1+\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{-y} = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow y = -\ln(1+\sqrt{2}) \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow w_k = (\frac{\pi}{2} + 2\pi k) - i\ln(1+\sqrt{2}), \; k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة (2)

ومجموعة حلول المعادلة f هي: $\{+\frac{\pi}{2} + \pi k, z_k, w_k \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$.

إجابة السؤال الثالث: ست وعشرون

* إيجاد γ_1:

$$\gamma_1(t) = (1-t)(0) + t(2+i) \quad ; 0 \le t \le 1$$
$$= 2t + it$$

تمثل $\overline{OB}$ حيث:

6 //

$$\int_{OB} Im\, z\, dz = \int_0^1 Im(2t+it)\cdot(2+i)\, dt$$
$$= (2+i)\int_0^1 t\, dt = (2+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \frac{i}{2}.$$

*

$$\int_{OA\oplus AB} Im\, z\, dz = \int_{OA} Im\, z\, dz + \int_{AB} Im\, z\, dz$$

8 //

$$\gamma_2(t) = (1-t)(0) + t(1+i)$$
$$= t + it \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

تمثل $\overline{OA}$ حيث:

$$\int_{OA} Im\, z\, dz = \int_0^1 Im(t+it)\cdot(1+i)\, dt$$
$$= (1+i)\int_0^1 t\, dt = (1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

وأيضاً:

$$\gamma_3(t) = (1-t)(1+i) + t(2+i)$$
$$= 1 - t + i - it + 2t + it$$
$$= (1+t) + i \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{AB} Im\, z\, dz = \int_0^1 (1)(1)\, dt = 1 \; //$$

$$\int_{OA\oplus AB} Im\, z\, dz = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + i\frac{1}{2}.$$

* تكامل f غير مستقل عن الطريق المسلوك لأن: $\int_{OB} Im\, z\, dz \neq \int_{OA\oplus AB} Im\, z\, dz$ حيث الرمز $\oplus$ يدل على الطريق الذي يبدأ أولاً OA ثم AB وليس AB ثم OA 4 //

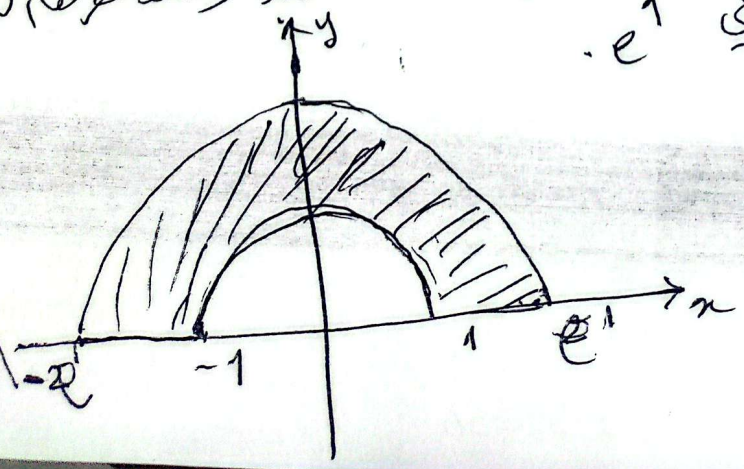
4) * وليس لـ F تابع أصلي على $\mathbb{C}$ لأنه تكامله غير مستقل عن الطريق المسلوك في $\mathbb{C}$.

5) * $F(z)=\operatorname{Im} z$ مستمر على $\mathbb{C}$ وليس له تابع أصلي على $\mathbb{C}$ وبالتالي يصلح لأن يكون مثالاً يبين خطأ الدعوى التالية:
"استمرارية تابع عقدي على منطقة كاف لوجود تابع أصلي له على تلك المنطقة".

إجابة السؤال الرابع: (عشرون درجة)

1) * لتكن $z \in S$، عندئذ: $|e^z| = e^0 = 1$، e^z تقع على دائرة الواحدة.
وبما أن $\arg e^z = y$ وعندما يمسح z القطعة المستقيمة S فإن y يمسح المجال $[0,\pi]$ و e^z يمسح النصف العلوي لدائرة الواحدة. وصورة كل نقطة في النصف العلوي لدائرة الواحدة.

* إن القطعة المستقيمة $S_{x_0} = \{z = x_0 + iy \mid 0 \le y \le \pi\}$ عندما يمسح x_0 المجال $[0,1]$. وإن صورة كل نقطة e^z في النصف العلوي للدائرة $C(0,e^{x_0})$ (نبين ذلك بنفس طريقة إيجاد صورة S)، إذا مسحت S_{x_0} المستطيل فصورتها تمسح صورة المستطيل والصورة ستكون نصف الحلقة العلوي التي حدّاها المبدأ ونصف قطرها الداخلي e^1 ونصف قطرها الخارجي e^1.



الإجابة السؤال الخامس: عشرون درجة

(١)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{C^+(0,\frac{1}{2})} \frac{\frac{\cos z}{z-i}}{z^2}\,dz$$

$f(z)=\frac{\cos z}{z-i}$ تحليلية على محيط ومداخل $D(0,\frac{1}{2})$

$D(0,\frac{1}{2}) \Rightarrow z_0=0$ ، حسب صيغة كوشي التكاملية:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0)$$

$$= 2\pi i \left.\frac{(-\sin z)(z-i)-\cos z}{(z-i)^2}\right|_{z=0}$$

$$= 2\pi i \frac{0-1}{-1} = 2\pi i$$

(٢)

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{C^+(i,\frac{1}{4})} \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{z-i}\,dz$$

$g(z)=\frac{\cos z}{z^2}$ تحليلية على محيط ومداخل $D(i,\frac{1}{4})$ ، $D(i,\frac{1}{4}) \ni z=i$

حسب صيغة كوشي الأولى:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = 2\pi i\, g(i) = 2\pi i \frac{\cos i}{-1} = -2\pi i \cos i$$

(٣) إن التكامل $\int_{\Gamma_3}$ معدوم لأن التكامل على محيط ومداخل $C^+(-3i,2)$

(٤)

$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-i}$$

ومنه $A=-C=1$ ، $C=-1$ ، $B=i$

(4)

$$\frac{\cos z}{z^2(z-i)} = \frac{\cos z}{z} + i\,\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\cos z}{z-i}$$

$$\int_{C^+(0,2)} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = \int_{C^+(0,2)} \frac{\cos z}{z}\,dz + i\int_{C^+(0,2)} \frac{\cos z}{z^2} - \int_{C^+(0,2)} \frac{\cos z}{z-i}\,dz$$

Γ_4

$z=i$ ، $z=0$ ، $C^+(0,2)$ داخل $h(z)=\cos z$ تحليلية على وعلى ! ن

تستمتان إلى $D(0,2)$ ، حسب صيغ كوشي التكاملية:

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\cos z}{z^2(z-i)}\,dz = 2\pi i\left[\cos 0 + i'(-\sin 0) - \cos i\right]$$

$$= 2\pi i'\left[1 - \cos i\right]$$

(5)

$$\left|1 + \frac{2i}{3} - 0\right|^2 = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} \Rightarrow \left|1+\frac{2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{13}}{3} > \frac{\sqrt{11}}{3}$$

والنقطة z_0 خارج Γ_5.

$$\left|1 + \frac{2i}{3} - i\right| = \left|1 - \frac{i}{3}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} < \frac{\sqrt{11}}{3}$$

والنقطة z_0 داخل Γ_5 والنتيجة هي نفسها نتيجة التكامل على Γ_2

أي التكامل: $-2\pi i'\cos i$.

انتهى الحل

نتمنى لطلبتنا
النجاح والتوفيق
في الامتحان القادم