سلم تصحيح مادة الرياضيات العامة (4)
سنة أولى / كيمياء /

السؤال الأول: (١٠ د) لكل حالة (2.5)

حالة ① اذا كان $q=1$ ⟸ $x_n=1$ ومن ثم فإن $x_n \longrightarrow 1$ ⟸ المتتالية متقاربة من العدد (1).

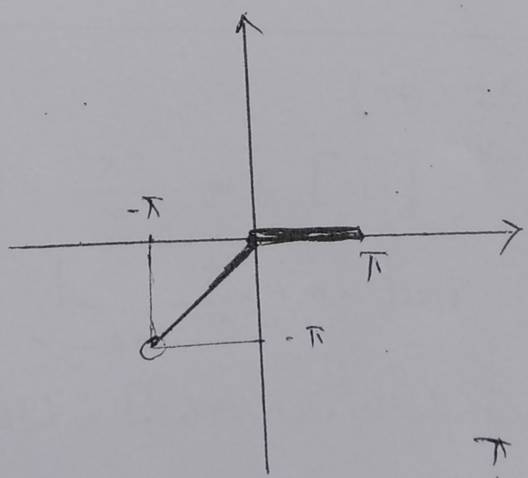
الحالة ② اذا كان $q=-1$ فإن $x_n=(-1)^n$ ⟸ المتتالية $\{(-1)^n\}$ تكون متباعدة لأنه لا توجد لا نهاية

حالة ③ اذا كان $|q|<1$ فإن $x_n=q^n \longrightarrow 0$ وبذلك المتتالية $\{q^n\}$ تكون متقاربة من الصفر.

④ اذا كان $|q|>1$ فإن x_n يكبر لا نهائياً مع n أكبر $x_n=q^n$ وتكون متباعدة في هذه الحالة.

السؤال الثاني: (25 درجة)

① (5) درجات



② (2) درجة $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx=-\frac{\pi}{2}$ . . . ③

2 -- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n\pi}\sin nx\right)_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\left(\cos nx\right)_{-\pi}^{0}\right] \quad \text{-- } 1$$

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right) \quad \text{-- } 2$$

2 -- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{-x}{n}\cos nx\right)_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n^2}\left(\sin nx\right)_{-\pi}^{0}\right] \quad \text{-- } 1$$

$$b_n = \frac{-1}{n}(-1)^n \quad \text{-- } 2$$

2 -- $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)$ 3

3 -- $f(x) \sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx - \frac{1}{n}(-1)^n\sin nx\right]$

السؤال الثالث : (25 درجة)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad x \in [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n} = 0 = f(x) \quad ,(5)$$

ونستنتج المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=0$

7 $\quad \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\frac{x^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \quad ,(5)$

بما أن $a_n = \frac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ومنه المتتالية $\boxed{\text{متقاربة بانتظام}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} \;,\; \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3}$$

(د2) - $\boxed{\text{المتسلسلة متباعدة}}$ ⟸ ج/ اختبار الجذر النوني
أو كوشي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{5^n}$$

(د5) ج/ اختبار النسبة أو دالمبير

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^2+2}{5^{n+1}}}{\dfrac{n^2+2}{5^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+3)\,5^n}{(n^2+2)\,5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{5n^2+10} = \frac{1}{5} < 1$$

(د2) -- متقاربة

السؤال الرابع: (د20) علامات

(د10) -- $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots \;,\; |t|<1$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left[1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots\right] dt$$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \cdots\right]_0^x$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots\right]$$

$$\ln(1+x) = \sum^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{} \;,$$

ACE Scanner

$1+2\times 2!+3\times 3!+4\times 4!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1$

1 - نبرهن صحة العلاقة من أجل $n=1$ ... (2)

$1 \overset{?}{=} (1+1)!-1 \Rightarrow 1=1$ محققة

2 - نفرض صحة العلاقة من أجل n ... (2)

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n! = (n+1)!-1$ ... (∅)

3 - نبرهن صحة العلاقة من أجل $n+1$

$1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+(n+1)(n+1)! = (n+2)!-1$ ... (2)

$$l_1 = \underbrace{1+2\times 2!+3\times 3!+\dots+n\times n!}_{\text{من } (\varnothing)} + (n+1)(n+1)!$$

$l_1 = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)!$ ... (2)

$(n+1)!(n+2)-1 = (n+2)!-1 = l_2$ ... (2)