1 2025 - 2ق - ت.ا.ف - س.ا.ف - الجبر الخطي

$(\cdot, 3, 0) - I$

1- القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\cdot\lambda - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -2 \; ; \; \lambda_2 = 5$$

$$A\cdot\vec{V} = (-2)\cdot\vec{V} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = -2$$

$$A\cdot\vec{V} = (5)\cdot\vec{V} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_2 = 5$$

-2

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\cdot|-1| & (-1)^{1+2}\cdot|3| \\ (-1)^{2+1}\cdot|2| & (-1)^{2+2}\cdot|4| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

نفس الحدود الخير

$$P_{A^{-1}}(\mu) = \det(A^{-1} - \mu\cdot I)$$

Scanned with CamScanner

2) $P_{A^{-1}}(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{1}{10} - \mu & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} - \mu \end{vmatrix}$

$= (\frac{1}{10} - \mu).(-\frac{2}{5} - \mu) - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10}$

$= 10.(\frac{1}{10}).(\mu + \frac{1}{2}).(\mu - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow$

$\mu_1 = -\frac{1}{2}$; $\mu_2 = \frac{1}{5}$

$\left.\begin{array}{l} A^{-1}.\vec{W} = (-\frac{1}{2}).\vec{W} \\ \vec{W} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{10}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\vec{W} = x.\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{W_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \mu_1 = -\frac{1}{2}$

$\vec{W_1}$: شعاع القاعدة (ناظم الفضاء الذاتي الرافق للقيمة الذاتية $\mu_1 = -\frac{1}{2}$ للمصفوفة A^{-1})

$A^{-1}.\vec{W} = (\frac{1}{5}).\vec{W} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{W} = y.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{W_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mu_2 = \frac{1}{5}$

$\vec{W_2}$: شعاع القاعدة (ناظم الفضاء الذاتي الرافق للقيمة الذاتية $\mu_2 = \frac{1}{5}$ للمصفوفة A^{-1})

لدى مقارنة القيم والأشعة الذاتية لـ A و A^{-1} نستنتج أن الأشعة الذاتية للمصفوفة A هي ذاتها الأشعة الذاتية للمصفوفة A^{-1} وبالتالي مقلوب القيم الذاتية للمصفوفة A هي مقلوب القيم الذاتية للمصفوفة A^{-1}.

- مقلوب I: نتبع خطوات المثال 2 في الجزء I

3)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نعبر A.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

بالتعويض نجد أن العلاقة هي

5- حساب A^4, $A^{1/2}$:

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-2)^4 & 0 \\ 0 & (5)^4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 538 & 174 \\ 261 & 103 \end{bmatrix}$$

$$A^{1/2} = P \cdot D^{1/2} \cdot P$$

$$P \cdot D^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$P \cdot D^{1/2} = \begin{bmatrix} i \cdot \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{5} \\ -3 \cdot i \cdot \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{1/2} = \begin{bmatrix} i \cdot \sqrt{2} & 2 \cdot \sqrt{5} \\ -3 \cdot i \cdot \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{bmatrix}$$

نجري الضرب فنحصل على:

$$A^{1/2} = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} i \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{5} & -2 \cdot i \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{5} \\ -3 \cdot i \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{5} & 6 \cdot i \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

4) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 & -4 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ 5 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (-2-\lambda)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2, -2, 3$$

$\lambda_1 = 2$: $A \cdot \vec{V} = (2)\cdot\vec{V} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{V} = y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 2$$

$\vec{V_1}$: شعاع القاعدة الذاتي للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$.

$\lambda_2 = -2$: $A \cdot \vec{V} = (-2)\cdot\vec{V} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{V} = y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\vec{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_2 = -2$$

$\vec{V_2}$: شعاع القاعدة الذاتي للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -2$.

$\lambda_3 = 3$: $A \cdot \vec{V} = (3)\cdot\vec{V} \xrightarrow{\text{Resolution}} \vec{V} = z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\vec{V_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_3 = 3$$

$\vec{V_3}$: شعاع القاعدة الذاتي للفضاء الذاتي الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$.

2- نوجد مصفوفة العبور P:

$$P = [\vec{V_1}\ \vec{V_2}\ \vec{V_3}] \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

5

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نكتب معادلة المسارات:

$$\frac{dX}{dt}(t) = A \cdot X(t)$$

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow P \cdot D \cdot P^{-1} = \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$\frac{dX}{dt}(t) = A \cdot X(t) = P \cdot D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot X(t)}_{Z(t)}$$

$$Z(t) = P^{-1} \cdot X(t)$$

$$\frac{dX}{dt}(t) = P \cdot D \cdot Z(t)$$

$$P^{-1} \cdot \frac{dX}{dt}(t) = P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot Z(t)$$

$$P^{-1} \cdot \frac{dX}{dt}(t) = D \cdot Z(t)$$

نعوض $Z(t)$:

$$P^{-1} \cdot \frac{dX}{dt}(t) = D \cdot P^{-1} \cdot X(t)$$

P مصفوفة عددية لا تتبع t، إذن:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(P^{-1} \cdot X)}_{Z} = D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot X}_{Z} \Rightarrow \frac{dZ}{dt}(t) = D \cdot Z(t)$$

نعوض Z بدلالة t:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

نعوض المصفوفات D و Z في المعادلة $\frac{dZ}{dt}(t) = D \cdot Z(t)$:

Scanned with CamScanner

(6)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot y_1 \\ -2 \cdot y_2 \\ 3 \cdot y_3 \end{bmatrix}$$

$$y_q' = \frac{dy}{dt}(t) \quad \text{for } q = 1, 2, 3$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot y_1 \\ -2 \cdot y_2 \\ +3 \cdot y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1'(t) = 2 \cdot y_1(t) \\ y_2'(t) = -2 \cdot y_2(t) \\ y_3'(t) = 3 \cdot y_3(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{Integration}}$$

$$y_1(t) = A \cdot e^{2 \cdot t}$$

$$y_2(t) = B \cdot e^{-2 \cdot t}$$

$$y_3(t) = C \cdot e^{3 \cdot t}$$

لكل المطلوب هو $X(t)$. للحصول عليه نبدأ بالمرين:

$$Z = P^{-1} \cdot X \Rightarrow P \cdot Z = P \cdot P^{-1} \cdot X \Rightarrow X(t) = P \cdot Z(t)$$

$$X(t) = P \cdot Z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot e^{2 \cdot t} \\ B \cdot e^{-2 \cdot t} \\ C \cdot e^{3 \cdot t} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} A \cdot e^{2 \cdot t} + B \cdot e^{-2 \cdot t} + C \cdot e^{3 \cdot t} \\ A \cdot e^{2 \cdot t} + B \cdot e^{-2 \cdot t} \\ B \cdot e^{-2 \cdot t} + C \cdot e^{3 \cdot t} \end{bmatrix}$$

و- حالة البدء:

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B + C \\ A + B \\ B + C \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} -2 \cdot e^{2 \cdot t} + 4 \cdot e^{-2 \cdot t} - e^{3 \cdot t} \\ -2 \cdot e^{2 \cdot t} + 4 \cdot e^{-2 \cdot t} \\ 4 \cdot e^{-2 \cdot t} - e^{3 \cdot t} \end{bmatrix}$$

A^{-1}

Scanned with CamScanner

7) $A \cdot X = B$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

بما أن $\det(A) \neq 0$ إذن A قابلة للقلب.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$adj(A) = [Cof(A)]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \; ; C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11 \; ; C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7 \; ; C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \; ; C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

Scanned with CamScanner

[8] $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11 & 5 & -7 \\ -7 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -11/8 & 5/8 & -7/8 \\ -7/8 & 1/8 & -3/8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 6 \; ; \; y = -11 \; ; \; z = -7$$

Scanned with CamScanner