تمرين 1: ليكن التابع العقدي المعرف بالعلاقة الآتية:

سلم تفوق كيميا
ف2 - 2025

$$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$$
$$u(x,y) = x^3 - 3.x.y^2$$

1- حدد التابع $v(x,y)$ بحيث يحقق شرط C.R.

2- أثبت أن $f(z)$ يأخذ من الشكل:

$$f(z) = z^3 + i.C \quad , C \in \mathbb{R}$$

؟ - هل $f(z)$ تابع هولومورف على $\mathbb{C}$ ؟

الحل: 1) شرط C.R: نفرض أن

$$z = x + i.y$$
$$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$$

C.R: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 3.x^2 - 3.y^2$; $u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -6.x.y$

نشتق C.R:

$$v_y = u_x = 3.x^2 - 3.y^2$$
$$v_x = -u_y = 6.x.y$$

2) نجد $v(x,y)$: نكامل v_x بالنسبة لـ x:

$$v(x,y) = \int v_x . dx = \int 6.x.y . dx = 3.x^2.y + h(y)$$

نشتق v بالنسبة لـ y:

$$v_y = 3.x^2 + h'(y)$$

نطابق مع v_y:

$$3.x^2 + h'(y) = 3.x^2 - 3.y^2 \Rightarrow$$
$$h'(y) = -3.y^2$$

نكامل $h'(y)$ فنجد:

$$h(y) = -y^3 + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

C2 $V(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$: ج- كتابة $f(z)$ بدلالة z :

$z = x + i.y$

$z^3 = (x+i.y)^3 = x^3 + 3.i.x^2.y - 3.x.y^2 - i.y^3$

$z^3 = \underbrace{(x^3 - 3.x.y^2)}_{U(x,y)} + i.\underbrace{(3.x^2.y - y^3)}_{V(x,y)}$ ومنه

$f(z) = U(x,y) + i.V(x,y) = z^3 + i.C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$

4) هولومورفية $f(z)$: بما أن $f(z)$ كثير حدود بالنسبة لـ z و إذن $f(z)$ تابع هولومورفي على $\mathbb{C}$. نذكر بأن التابع يكون هولومورفي عند نقطة z_0 إذا كان قابلا للاشتقاق عند z_0 بالمعنى العقدي، أي إذا كان موجودا نهاية معدل التغير العقدي للتابع، وكان وحيدا بشكل مستقل عن الجهة في المستوي العقدي. كثير الحدود العقدي تابع للاشتقاق و إذن هولومورفي.

C3

لدينا التابع التالي:

$$u(x,y) = 3x^3 - 9xy^2 + 4x^2 - 4y^2 - y$$

1- أثبت أن $u(x,y)$ تابع توافقي

2- أوجد جميع التوابع $v(x,y)$ التي تجعل من التابع العقدي $f(z)$ حيث $f(z) = u + iv$ تابعاً هولومورفياً

الحل: 1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x + 8 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -18x - 8$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 18x + 8 - 18x - 8 = 0$$

إذن u توافقي.

2) ليكون التابع $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

تابعاً هولومورفاً إذا حقق u, v شرط كوشي-ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 - 9y^2 + 8x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -18xy - 8y - 1$$

نشكل معادلة C.R.:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 9x^2 - 9y^2 + 8x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(-18xy - 8y - 1) = 18xy + 8y + 1 \quad (2)$$

لإيجاد v نكامل (1) بالنسبة لـ y:

$$v(x,y) = \int dy\,(9x^2 - 9y^2 + 8x)$$

$$v(x,y) = 9x^2 y - 3y^3 + 8xy + h(x)$$

نشتق v بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 18xy + 8y + h'(x)$$

نقارن مع (2) نستنتج:

C4

$$18.x.y + 8.y + h'(x) = 18.x.y + 8.y + 1 \Rightarrow$$

$$h'(x) = 1 \xrightarrow{\text{integration}} h(x) = x + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

إذن:

$$V(x,y) = 9.x^2.y - 3.y^3 + 8.x.y + x + C$$

ب) لماذا ظاهرة أن يكون $U(x,y)$ تابعاً توافقياً تؤرجحه؟

لكي الدالة الطلوبة التابع $f(z) = u + i.v$

الحل: يكون التابع $f(z) = U(x,y) + i.V(x,y)$ توافقي على $U \subset \mathbb{R}^2$ إذا كان من الصف C^2 ويحقق معادلة Laplace:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

يكون التابع:

$$f(z) = U(x,y) + i.V(x,y)$$

الطرف على الأقل الطرفة $U \subset \mathbb{C}$ تابعاً هولومورف إذا كان قابلاً للاشتقاق بالمعنى العقدي على U. وهذا يقتضي أن يحقق $U(x,y)$ و $V(x,y)$ معادلات C.R.:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$

فنشتق الشرط الأول بالنسبة لـ x والشرط الثاني بالنسبة لـ y

ثم نجمع:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \Delta U(x,y) = 0$$

إذن توافقية $U(x,y)$ هي شرط كافٍ يفرض على $U(x,y)$ أن يكون التابع $f(z)$ هولومورف.

Scanned with CamScanner

a

C5 لدينا قطعة المستقيم [C] المعرفة بالنقطتين $z_1 = 2 - i$ ، $z_2 = 6 + 2.i$ والمعرفة بالعبارة :

$$z(t) = (2 + 4.t) + i.(-1 + 3.t) \; ; \; t \in [0,1]$$

ولتكن الدالة :

$$f(z) = Re(z).Im(z) = x.y$$

1- دراسة معادلات C.R. على القطعة C :

a) أوجد $u(x,y)$ و $v(x,y)$ بحيث يكون

$$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$$

b) اعتمد الخاصيات الكتابية المألوفة، أثبت أن f لا تحقق معادلات C.R. إلا في نقاط محددة، ثم حدد هذه النقاط على C

2- هولومورفية f على C

هل f هولومورفة على C

3- تطبيق على مبرهنة Lemme d'estimation :

a) احسب طول القطعة C

b) أوجد الحد الأعلى لـ $|f(z)|$ على C

c) أثبت أن f تحقق مبرهنة Lemme d'estimation

$$\left| \int_C f(z).dz \right| \leq M.L$$

$$M = \sup_{z \in C} |f(z)| \; ; \; L = \text{Longueur de } C$$

الحل 1) دراسة معادلات C.R. :

a) نكتب الدالة :

$$f(z) = u(x,y) + i.v(x,y)$$

$$u(x,y) = x.y \; ; \; v(x,y) = 0$$

b) معادلات C.R. :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Scanned with CamScanner

...

ت $\frac{\partial u}{\partial x} = x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = y$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

نلاحظ إذن محققة لـ C.R. :

$x = 0$, $y = 0$

لا تتحقق هاتين المعادلتين إلا في النقطة $(x, y) = (0, 0)$

لدى القطعة C المعرفة بالتمثيل :

$x(t) = 2 + 4.t$; $y(t) = -1 + 3.t$, $t \in [\,.\,]$

بين التأكد بسرعة أن $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ تكون محققة

$x(t) = 0 \rightarrow 2 + 4.t = 0 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$y(t) = 0 \rightarrow -1 + 3.t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

نلاحظ أنه لا يمكن تحقيق الشرطين في نفس الوقت لدى C

إذن معادلات C.R تم تحقيقها لدى C . معادلات C.R تحقق عند نقطة لا تنتمي إلى C

2) قابلية الاشتقاق f لدى C :

يكون التابع قابل للاشتقاق عند نقطة إذا تحققت معادلات C.R. وكان قابل للاشتقاق بالمعنى العقدي عند هذه النقطة . في حالتنا ، التابع $f(z) = x.y$ لا تحقق معادلات C.R لدى C إلا عند نقطة تقع خارج C . إذن التابع f ليس قابل للاشتقاق لدى C

3) نظرية Estimation Theorem

4) حساب L طول C :

طول القطعة C هو طويلة سطح الإنحناء :

C7

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}x(t) + i\cdot\frac{d}{dt}y(t) = 4 + 3.i$$

العبارة إذن:

$$L = \int_0^1 dt.|\gamma'(t)| = |4+3.i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

3) القيمة العظمى لـ $|f(\gamma)|$ على C:

Majoration de $|f(\gamma)|$

نشر:

$$f(\gamma(t)) = x(t).y(t) = (2+4.t).(-1+3.t)$$

$$f(\gamma(t)) = -2 + 2.t + 12.t^2$$

$$M = \max_{t\in[1]} |f(\gamma(t))|$$

بما أن $|f(\gamma(t))|$ كثير حدود مستمر، تتواجد القيمة العظمى عند نقطة حرجة (حدية) أو عند الأطراف:

$$|f(0)| = |-2| = 2$$

$$|f(1)| = |-2+2+12| = |12| = 12$$

إذن نستنتج أن القيمة العظمى هي 12

سوف نتحقق من وجود نقاط حرجة:

$$\frac{d}{dt}f(\gamma) = 2 + 24.t$$

$$\frac{df(\gamma)}{dt} = 0 \rightarrow 2+24.t = 0 \Rightarrow t_{extremum} = -\frac{1}{12}$$

وهذه القيمة لا تنتمي إلى مجال تغيرات t.

إذن $|f(\gamma(t))|$ تابع متزايد دوماً بسبب غياب نقطة حرجة على المجال المدروس.

المتراجحة:

$$\left|\int_C f(\gamma).d\gamma\right| \leq M.L$$

Scanned with CamScanner

C8

$$M = \sup_{z \in C} |f(z)|$$

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq 12 \times 5 = 60$$

ملاحظة الإجابة: * الشرط $f(z) = x \cdot y$ ليس شرط

هو لا يعرف على القطعة C المطلوبة

* بالرغم من أنه ليس هولومورف فإنه يحقق متباينة

التخمين لأن القيمة المطلقة لأي تكامل مخمن للشرط

$f(z)$ على C محدود بالقيمة $M \cdot L = 60$

Cg

- لدينا التابع: $f(z) = 2.\bar{z} + 3.|z|^2$

نعتبر المسارين C_1 و C_2 في المستوي العقدي:

A - نصف الدائرة C_1 ذات نصف القطر 1 ومركزها مركز الإحداثيات O، المعرف بالعلاقة $|z|=1$ من النقطة $z_1=(1,0)$ إلى $z_2=(-1,0)$ بالاتجاه المباشر (عكس عقارب الساعة).

B - قطعة المستقيم C_2 الواصلة بين $z_1=(1,0)$ و $z_2=(-1,0)$

نريد حساب التكامل المنحني العقدي التالي

$$I = \int_C f(z)\,dz$$

على طول المسارين C_1 و C_2

1- اكتب الصيغة الجبرية لكل من C_1 و C_2

2- اكتب $f(z)$ بدلالة x و y

3- احسب التكامل على طول C_1

4- " " " C_2

5- قارن النتيجة.

الحل: 1) * نصف الدائرة C_1: يمكن كتابة معادلة دائرة الواحدة بشكل بارامتري كما يلي:

$$z(t) = e^{i.t} = \cos t + i.\sin t \quad , t \in [0, \pi]$$

نبدأ من $z(0)=1$ وتنتهي بـ $z(\pi)=-1$ بالاتجاه المباشر.

* نصف القطعة C_2: القطعة الواصلة بين -1 و $+1$ تمثل بـ:

$$z(t) = 1 - 2.t \quad , t \in [0,1]$$

$z(0)=1$; $z(1)=-1$

هنا $z(t)$ حقيقي لأن $y=0$

C10 $z = x + i.y$: $f(z)$ أحسب -2

$\bar{z} = x - i.y$; $|z|^2 = x^2 + y^2$

$f(z) = 2.\bar{z} + 3.|z|^2 = 2.|x - i.y| + 3.(x^2 + y^2)$

$f(z) = 2.(x - i.y) + 3.(x^2 + y^2)$

3- أحسب التكامل I_1 على C_1 حيث C_1 نصف دائرة

$$I_1 = \int_{C_1} f(z).dz = \int_0^{\pi} f(z(t)).z'(t).dt$$

$z(t) = \cos t + i.\sin t$

$z'(t) = -\sin t + i.\cos t$

$x(t) = \cos t$; $y(t) = \sin t$

$f(z(t)) = 2.(\cos t - i.\sin t) + 3.(\cos^2 t + \sin^2 t)$

$f(z(t)) = 2.\cos t - 2.i.\sin t + 3 \times 1$

$f(z(t)) = 3 + 2.\cos t - 2.i.\sin t$

$$I_1 = \int_0^{\pi} [3 + 2.\cos t - 2.i.\sin t].[-\sin t + i.\cos t].dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} [-3.\sin t + i.(3.\cos t + 2)].dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} -3.\sin t.dt + i.\int_0^{\pi} (3.\cos t + 2).dt$$

$$\int_0^{\pi} -3.\sin t.dt = -6$$

Scanned with CamScanner

C11

$$I_1 = -6 + i \cdot 2\pi$$

- في حساب I_2 نلاحظ أن C_2 محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = 0$ إذن:

$$\gamma(t) = 1 - 2t, \quad t \in [0,1]$$

$$d\gamma = \frac{d}{dt}\gamma(t) \cdot dt = -2 \cdot dt$$

- نحسب $f(\gamma(t))$:

$$x(t) = 1 - 2t \; ; \; y(t) = 0$$

$$f(\gamma(t)) = 2.(x(t) - i \times 0) + 3.(x^2(t) + 0)$$

$$f(\gamma(t)) = 2.(1 - 2t) + 3.(1 - 2t)^2$$

$$f(\gamma(t)) = 5 - 16t + 12t^2$$

$$I_2 = \int_{t=0}^{t=1} f(\gamma(t)).dt \, d\gamma = \int_0^1 (5 - 16t + 12t^2).(-2.dt)$$

$$I_2 = -2 \int_0^1 (5 - 16t + 12t^2).dt = -2 \times (1) = -2$$

$$I_2 = -2$$

- الخلاصة:

$$I_1 = -6 + i \cdot 2\pi$$

$$I_2 = -2$$

نلاحظ أن التكاملين مختلفين. إذن الدالة f ليست مركبة على $\mathbb{C}$.

END